Министерство образования Российской Федерации
ФГАОУ ВПО «Уральский Федеральный Университет
им.первого Президента России Б.Н.Ельцина»

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Сборник типовых заданий
для студентов физических специальностей

Екатеринбург
2010

УДК 514.742.4

Составители: Н.М. Кравченко, М.М. Михалева, Г.А. Чердынцева
Научный редактор: доц., канд.физ–мат.наук Р.М. Минькова

Функции нескольких переменных: Сборник типовых заданий для студентов физических специальностей/ сост. Н.М. Кравченко, М.М. Михалева, Г.А. Чердынцева, под общ.ред. Р.М. Миньковой. Екатеринбург: ФГАОУ ВПО УрФУ им.первого Президента России Б.Н. Ельцина, 2010. 37 с.

Приведены типовые индивидуальные задания по теме «Функции нескольких переменных»; разбирается решение типовых примеров и задач по этой теме. Сборник заданий предназначен для студентов физических специальностей физико–технического факультета.

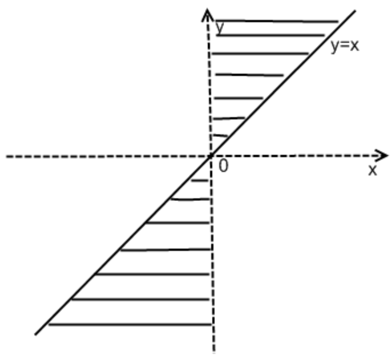
Рис. 2.

Подготовлено кафедрой «Вычислительные методы
и уравнения математической физики»

Образец выполнения домашнего задания по теме «Функции нескольких переменных»

Задача 1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $f(x,y)=\arcsin(x/y)+\ln(xy)$.

Решение. Данная функция определена в точках, удовлетворяющих следующим неравенствам: $\begin{cases}|x/y|\le 1\\ xy>0.\end{cases}$ Если заменить $(x,\ y)$ на $(-x,\ -y)$ соответственно, то неравенства не изменятся, следовательно, искомая область симметрична относительно начала координат и достаточно построить ее в I четверти, затем отобразить относительно точки *O*. Для I четверти систему можно записать в виде $\begin{cases}x\le y\\ x>0,\ y>0\end{cases}$. Строим границу области: прямые $x=y$, $x=0$, $y=0$ (оси *Ox* и *Oy* изображены пунктирной линией, так как соответствующие неравенства строгие). Чтобы определить саму область, используем метод пробных точек: точка $(1;\,2)$ удовлетворяет системе, значит, она входит в искомую область, а так же все точки, расположенные в I четверти между прямыми $x=0$ и $x=y$. Отражаем построенную область симметрично относительно точки *O*. Заштрихованная область и является областью определения данной функции.



Задача 2. Линеаризовать функцию $f(x,y,z)=\operatorname{ch}\dfrac{x+z}{y^2}+y^{x-z}$ в окрестности точки $A(0;2;0)$.

Решение. Формула для линеаризации функции $f(x,y,z)$ в окрестности точки (x_0,y_0,z_0):

$f(x,y,z)\approx f(x_0,y_0,z_0)+f'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+f'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)$ Вычисляем частные производные функции $f(x,y,z)$, их значения и значение функции в точке $A(0;2;0)$:

$f_x{}'=\operatorname{sh}\dfrac{x+z}{y^2}\cdot\dfrac{1}{y^2}+y^{x-z}\cdot\ln y$; $\qquad f_x{}'(A)=\operatorname{sh}\dfrac{0}{4}\cdot\dfrac{1}{4}+2^0\cdot\ln 2=\ln 2$;

$f_y{}'=\operatorname{sh}\dfrac{x+z}{y^2}\cdot\dfrac{-2(x+z)}{y^3}+(x-z)\cdot y^{x-z-1}$; $\qquad f_y{}'(A)=\operatorname{sh}\dfrac{0}{4}\cdot\dfrac{0}{8}+0\cdot 2^{-1}=0$;

$f_z{}'=\operatorname{sh}\dfrac{x+z}{y^2}\cdot\dfrac{1}{y^2}+(-1)\cdot y^{x-z}\cdot\ln y$; $\qquad f_x{}'(A)=\operatorname{sh}\dfrac{0}{4}\cdot\dfrac{1}{4}-2^0\cdot\ln 2=-\ln 2$;

$f(A)=\operatorname{ch}\dfrac{0}{2}+2^0=2$.

Теперь подставляем найденные коэффициенты в формулу линеаризации функции: $f(x,y,z) \approx 2 + \ln 2(x-0) + 0(y-2) + (-\ln 2)(z-0) = 2 + \ln 2 \cdot x - \ln 2 \cdot z$.

Задача 3(а). Является ли функция $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + y^2}{x^2 + y^2}, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0, \end{cases}$ в точке $(0,0)$ непрерывной? Дифференцируемой? Существуют ли $f_x'(0,0)$, $f_y'(0,0)$?

Решение. Функция непрерывна в точке (x_0, y_0), если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

Вычисляем предел:
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^4 + y^2}{x^2 + y^2} = \begin{vmatrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{vmatrix} = \lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{\rho^2(\rho^2\cos^4\varphi + \sin^2\varphi)}{\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \lim\limits_{\rho \to 0}(\rho^2\cos^4\varphi + \sin^2\varphi) = \sin^2\varphi$. Предел функции принимает различные значения в зависимости от значений φ и, следовательно, не существует. Значит, функция в точке $(0,0)$ не является непрерывной. Следовательно, она и не дифференцируема (известно, что если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке).
Так как функция неэлементарная, то частные производные вычисляем по определению:

$$f_x'(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{(\Delta x)^4}{(\Delta x)^2} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = 0,$$

$f_y'(0,0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\frac{(\Delta y)^2}{(\Delta y)^2} - 0}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{1}{\Delta y} = \infty$. Значит, частная производная $f_y'(0,0)$ не существует.

Задача 3(б). Показать, что функция $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^2}{x^4 + y^4}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$ непрерывна и имеет частные производные в точке $(0,0)$, но не дифференцируема в этой точке.

Решение. Аналогично предыдущей задаче, исследуем функцию на непрерывность:
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^3 y^2}{x^4 + y^4} = \begin{vmatrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{vmatrix} = \lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{\rho^5 \cos^3\varphi \cdot \sin^2\varphi}{\rho^4(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)} = \lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{\rho\cos^3\varphi \cdot \sin^2\varphi}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi} = 0 = f(0,\,0)$. Значит, функция непрерывна в точке $(0,0)$.
Вычисляем частные производные (по определению):

$f_x'(0,0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\frac{0}{(\Delta x)^4} - 0}{\Delta x} = 0$, $\quad f_y'(0,0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\frac{0}{(\Delta y)^4} - 0}{\Delta y} = 0$. Значит, частные производные в точке $(0,0)$ равны 0.

Функция дифференцируема в точке (x_0, y_0), если ее полное приращение в этой точке представимо в виде $\Delta f(x_0, y_0) = f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_y'(x_0, y_0)\Delta y + \rho \cdot \gamma$, где $\gamma = \gamma(\rho)$ бесконечно малая при $\rho \to 0$ $\left(\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)$.

Предположим, что данная функция дифференцируема в точке $(0,0)$, тогда ее приращение $\Delta f(0,0) = \dfrac{(\Delta x)^3 (\Delta y)^2}{(\Delta x)^4 + (\Delta y)^4}$ представимо в виде:

$\Delta f(0,0) = 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + \rho \cdot \gamma = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \cdot \gamma$ или

$\Delta f(0,0) = \dfrac{(\Delta x)^3 (\Delta y)^2}{(\Delta x)^4 + (\Delta y)^4} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \cdot \gamma$. При $\Delta y = \Delta x > 0$ это равенство имеет вид: $\dfrac{(\Delta x)^5}{2(\Delta x)^4} = \sqrt{2(\Delta x)^2} \cdot \gamma$, $\dfrac{(\Delta x)}{2} = \sqrt{2}(\Delta x) \cdot \gamma$. Тогда $\gamma = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, т.е. γ не является бесконечно малой, и, следовательно, функция не дифференцируема в точке $(0,0)$.

Задача 4. Найти $\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}$, если $\omega = f(u, v)$ – дважды дифференцируемая функция; $u = y/x$, $v = x - y$.

Решение. Находим частную производную $\dfrac{\partial \omega}{\partial x}$ как производную сложной функции: $\dfrac{\partial \omega}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \left(\dfrac{-y}{x^2}\right) + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot 1$. Теперь от полученной производной $\dfrac{\partial \omega}{\partial x}$ вычисляем производную по y, учитывая, что $\dfrac{\partial f}{\partial u}$, $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ являются функциями от u, v:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)'_y \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right)'_y + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)'_y =$$

$$= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\right] \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\right] =$$

$$= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot (-1)\right] \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot (-1)\right] =$$

$$= \frac{-y}{x^3} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{y + x}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

Задача 5. Доказать, что $x z'_x + y z'_y = z$, если $f(z/y) = z/x$ и $f(u)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Решение. Равенство $f(z/y) = z/x$ определяет z как неявную функцию от x, y. Дифференцируем это равенство, учитывая, что $f'_u du = d\left(z/x\right)$ (1).

Используем формулу для дифференциала произведения: $du = d\left(z \cdot \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y}dz + z\,d\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{dz}{y} - \frac{z\,dy}{y^2}$, $\quad d\left(z \cdot \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}dz + z\,d\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{dz}{x} - \frac{z\,dx}{x^2}$.

Подставляем эти выражения в равенство (1): $f'_u\left(\frac{dz}{y} - \frac{z\,dy}{y^2}\right) = \frac{dz}{x} - \frac{z\,dx}{x^2}$. Находим $dz = \frac{f'_u\left(z/y^2\right)dy - \left(z/x^2\right)dx}{f'_u(1/y) - (1/x)} = \frac{x^2 z\, f'_u\, dy - y^2 z\,dx}{xy(x\,f'_u - y)}$. В этой форме коэффициент при dx есть z'_x, коэффициент при dy есть z'_y, так как $dz = z'_x dx + z'_y dy$. Тогда $z'_x = \frac{-y^2 z}{xy(x\,f'_u - y)}$, $z'_y = \frac{x^2 z\, f'_u}{xy(x\,f'_u - y)}$.

Составляем выражение из левой части доказываемого равенства и преобразуем его: $x\,z'_x + y\,z'_y = x\frac{-y^2 z}{xy(x\,f'_u - y)} + y\frac{x^2 z\, f'_u}{xy(x\,f'_u - y)} = \frac{-yz + xz\, f'_u}{(x\,f'_u - y)} = z$. Получили требуемое равенство.

Задача 6. Найти производные второго порядка от функций $u(x,y)$, $v(x,y)$ в точке $x=-1$, $y=1$, заданных неявно системой $\begin{cases} u + v = x + y + \pi/2, \\ \sin u + \sin v = -xy, \end{cases}$ если $u(-1,1)=0$, $v(-1,1)=\pi/2$.

Решение. Продифференцируем оба уравнения системы:

$$\begin{cases} d(u+v) = d(x+y), \\ d(\sin u + \sin v) = -d(yx), \end{cases} \qquad \begin{cases} du + dv = dx + dy, \\ \cos u\,du + \cos v\,dv = -(y\,dx + x\,dy), \end{cases} \qquad (2).$$

Еще раз продифференцируем оба уравнения, учитывая, что $d^2u(x,y) = d(du)$, $d^2v(x,y) = d(dv)$ при фиксированных dx, dy и поэтому $d(dx) = d(dy) = 0$:

$$\begin{cases} d^2u + d^2v = 0, \\ -\sin u\,(du)^2 + \cos u\,d^2u - \sin v\,(dv)^2 + \cos v\,d^2v = -(dy\,dx + dx\,dy), \end{cases} \qquad (3).$$

Из системы (2) в заданной точке: $\begin{cases} du + dv = dx + dy, \\ \cos 0\,du + \cos(\pi/2)\,dv = -(1\cdot dx - 1\cdot dy), \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} du = -dx + dy, \\ dv = 2dx. \end{cases}$ Из системы (3) в заданной точке:

$$\begin{cases} d^2u + d^2v = 0, \\ -\sin 0\,(du)^2 + \cos 0\,d^2u - \sin(\pi/2)(dv)^2 + \cos(\pi/2)\,d^2v = -(dy\,dx + dx\,dy), \end{cases} \Rightarrow$$

$\begin{cases} d^2u + d^2v = 0, \\ d^2u - (dv)^2 = -2dx\,dy. \end{cases}$ Подставляя dv, получим: $\begin{cases} d^2u + d^2v = 0, \\ d^2u - (2dx)^2 = -2dx\,dy, \end{cases}$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} d^2u = 4dx^2 - 2dx\,dy, \\ d^2v = -4dx^2 + 2dx\,dy. \end{cases}$$

Из последней системы получаем, что

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(-1;1)} = 4, \quad \left.\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|_{(-1;1)} = -4, \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{(-1;1)} = \left.\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right|_{(-1;1)} = 0.$$

Задача 7. Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^3 + 6xz + 6yz.$$

Решение. Находим критические точки, используя необходимое условие экстремума:

$\begin{cases} f'_x = 0, \\ f'_y = 0, \\ f'_z = 0. \end{cases}$ В нашем случае $\begin{cases} 2x + 6z = 0, \\ 2y + 6z = 0, \\ 3z^2 + 6x + 6y = 0. \end{cases}$

Решаем систему: $\begin{cases} x = -3z, \\ y = -3z, \\ z^2 - 12z = 0. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = z = 0; \\ x = y = -36, z = 12. \end{array} \right.$

Каждую из двух полученных точек проверяем по достаточному условию экстремума. Для этого вычисляем вторые производные и их значения в найденных критических точках $M_1(0;0;0)$ и $M_1(-36;-36;12)$.

$f''_{xx} = 2$, $f''_{yy} = 2$, $f''_{zz} = 6z$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{xz} = 6$, $f''_{yz} = 6$.

Для точки $M_1(0;0;0)$:

$A_{11} = f''_{xx} = 2$, $A_{22} = f''_{yy} = 2$, $A_{33} = f''_{zz} = 0$, $A_{12} = A_{21} = f''_{xy} = 0$, $A_{13} = A_{31} = f''_{xz} = 6$, $A_{23} = A_{32} = f''_{yz} = 6$. Находим определители $\Delta_1 = A_{11} = 2$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 6 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -144.$$

По достаточному признаку экстремума для $f(x,y,z)$: если Δ_1, Δ_2, Δ_3 – положительны, то в точке M_1 функция имеет минимум, если знаки Δ_1, Δ_2, Δ_3 чередуются, начиная с минуса, то в точке M_1 функция имеет максимум. Здесь этот достаточный признак не работает. Поэтому воспользуемся другим достаточным признаком экстремума: если $d^2 f(x,y,z) > 0$, то функция в соответствующей точке имеет минимум, если $d^2 f(x,y,z) < 0$, то – максимум, если $d^2 f(x,y,z)$ меняет знак в окрестности точки, то в этой точке экстремума нет.

В нашем случае:

$$d^2 f(x,y,z) = f''_{xx}(dx)^2 + f''_{yy}(dy)^2 + f''_z(dz)^2 + 2f''_{xy}dx\,dy + 2f''_{xz}dx\,dz + 2f''_{yz}dy\,dz =$$

$=2(dx)^2+2(dy)^2+12dx\,dz+12dy\,dz$. Если $dy=0,\ dz=dx$, то $d^2f=14(dx)^2>0$. Если $dy=0,\ dz=-dx$, то $d^2f=-10(dx)^2<0$. Так как d^2f принимает значения разных знаков, то экстремума в точке M_1 нет.

Проверяем достаточное условие для точки $M_2(-36;-36;12)$:

$A_{11}=2$, $A_{22}=2$, $A_{33}=72$, $A_{12}=A_{21}=0$, $A_{13}=A_{31}=6$, $A_{23}=A_{32}=6$.

Находим определители $\Delta_1=2$; $\Delta_2=\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix}=4$, $\Delta_3=\begin{vmatrix}2&0&6\\0&2&6\\6&6&72\end{vmatrix}=144$. Так как все определители больше нуля, точка M_2 является точкой минимума, при этом $f_{\min}=f(M_2)=-864$.

Задача 8. Исследовать на локальный экстремум функцию $z(x,y)$, заданную неявно уравнением $x^2+y^2+z^2=2x-2y+4z+10$.

Решение. Представим исходное уравнение в виде $F(x,y,z)=0$ и продифференцируем: $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$,

$$2xdx+2ydy+2zdz-2dx+2dy-4dz=0 \qquad (4).$$

Выразим отсюда dz: $dz=\dfrac{-xdx-ydy+dx-dy}{z-2}=\dfrac{1-x}{z-2}dx+\dfrac{-1-y}{z-2}dy$.

Тогда $z'_x=\dfrac{1-x}{z-2}$, $z'_x=\dfrac{-1-y}{z-2}$. Найдем критические точки из условия: $\begin{cases}z'_x=0,\\ z'_y=0,\\ F=0.\end{cases}$ Получим:

$$\begin{cases}\dfrac{1-x}{z-2}=0,\\ \dfrac{-1-y}{z-2}=0,\\ x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1,\\ y=-1,\\ z^2-4z-12=0;\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}M_1(1,-1),\ z_1=-2,\\ M_2(1,-1),\ z_2=6.\end{array}\right.$$

Каждую из двух полученных точек проверяем по достаточному условию экстремума. Для этого продифференцируем равенство (4), учитывая, что dx, dy – фиксированные, а z – функция от x, y:

$$2(dx)^2+2(dy)^2+2(dz)^2+2zd^2z-4d^2z=0.$$

Так как в критической точке $dz=0$, то $d^2z=\dfrac{2(dx)^2+2(dy)^2}{4-2z}=\dfrac{(dx)^2+(dy)^2}{2-z}$.

Вычисляем значение дифференциала в критических точках:

$d^2z(M_1)=\dfrac{dx^2+dy^2}{4}>0$, следовательно, $M_1(1,-1)$ точка минимума и $z_{\min}=-2$;

$d^2z(M_2)=\dfrac{dx^2+dy^2}{-4}<0$, следовательно, $M_2(1,-1)$ точка максимума и $z_{\max}=6$.

Задача 9. Исследовать на экстремум функцию $f(x,\,y,\,z)=xy+yz$, если $x^2+y^2=2$, $y+z=2$ ($x>0,\ y>0,\ z>0$).

Решение. Имеем задачу на условный экстремум. Запишем уравнения связи в виде $F(x,\,y,\,z)=x^2+y^2-2=0$, $G(x,\,y,\,z)=y+z-2=0$ и составим функцию Лагранжа:

$$\varPhi=f+\lambda F+\mu G=xy+yz+\lambda(x^2+y^2-2)+\mu(y+z-2).$$

Находим критические точки из системы:

$$\begin{cases}\varPhi'_x=0,\\ \varPhi'_y=0,\\ \varPhi'_z=0,\\ F=0,\\ G=0;\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}y+2\lambda x=0,\\ x+z+2\lambda y+\mu=0,\\ y+\mu=0,\\ x^2+y^2-2=0,\\ y+z-2=0;\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{выразим из 1}^{\text{го}}\text{ уравнения}\\ \text{из 3}^{\text{го}}\text{ уравнения}\\ \text{подставим их во 2}^{\text{е}}\text{ уравнение,}\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lambda=-y/(2x),\\ x+(2-y)+2(-y/(2x))y-y=0,\\ \mu=-y,\\ x^2+y^2=2,\\ z=2-y;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=-y/(2x),\\ x^2+2x-2xy-y^2=0,\\ \mu=-y,\\ x^2+y^2=2,\\ z=2-y;\end{cases}\Rightarrow$$

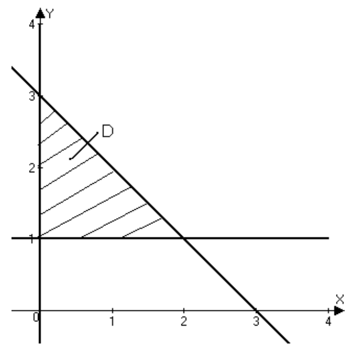
$$\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{из уравнения связи}\\ x^2+y^2=2\ \text{ выразим }\ x^2\ \text{ и}\\ \text{подставим во 2}^{\text{е}}\text{ уравнение,}\\ \text{сократим его на 2,}\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}\lambda=-y/(2x),\\ x-xy-y^2+1=0,\\ \mu=-y,\\ x^2+y^2=2,\\ z=2-y;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=-y/(2x),\\ (1-y)(x+y+1)=0,\\ \mu=-y,\\ x^2+y^2=2,\\ z=2-y.\end{cases}$$

Получаем единственное решение системы $x=y=z=1$, соответствующее коэффициентам $\lambda=-1/2$, $\mu=-1$. Вычисляем вторые производные и находим значение дифференциала второго порядка в критической точке: $\varPhi''_{xx}=2\lambda$, $\varPhi''_{yy}=2\lambda$, $\varPhi''_{zz}=0$, $\varPhi''_{xy}=1$, $\varPhi''_{xz}=0$, $\varPhi''_{yz}=1$, $d^2\varPhi=-dx^2-dy^2+2dx\,dy+2dy\,dz$.

Из уравнения связи следует, что $dy=-dz$, поэтому $d^2\varPhi=-dx^2-dy^2+2dx\,dy-2dy^2=-(dx+dy)^2-2dy^2<0$. Таким образом, точка $(1,1,1)$ является максимумом функции и $f_{\max}=2$.

Задача 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2+y^2-xy-x-y$ в области $D\colon x\ge 0,\ y\ge 1,\ x+y\le 3$.

Решение. Находим критические точки функции внутри области из условия $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$ Получаем $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0, \\ 2y - x - 1 = 0; \end{cases} \Rightarrow$ $(x, y) = (1, 1)$ – точка лежит на границе области D. Значит, внутри области критических точек нет.



Исследуем на границе области D. Для исследования разбиваем границу на три участка (соответственно сторонам треугольника):

$$\begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ 1 \le y \le 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ y = 3 - x. \end{cases}$$

На первом участке функция имеет вид $z = x^2 - 2x$. Находим критические точки из условия $z' = 0$: $2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ (принадлежит первому участку); тогда $z_1 = z(1, 1) = -1$.

На втором участке функция имеет вид $z = y^2 - y$. Находим критические точки: $2y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1/2$ (не принадлежит второму участку).

На третьем участке функция имеет вид $z = x^2 + (3 - x)^2 - x(3 - x) - x - (3 - x)$ или $z = 3x^2 - 9x + 6$. Находим критические точки: $6x - 9 = 0 \Rightarrow x = 3/2$ (принадлежит третьему участку); тогда $z_2 = z(3/2, 3/2) = -3/4$.

Вычисляем значения функции в точках стыка участков (вершины треугольника): $z_3 = z(0, 1) = 0$, $z_4 = z(2, 1) = 0$, $z_5 = z(0, 3) = 6$. Выбираем из полученных значений наибольшее и наименьшее: $z_5 = z(0, 3) = 6$ – наибольшее значение,
$z_1 = z(1, 1) = -1$ – наименьшее значение.

Задача 11. Определить, каковы размеры открытой прямоугольной ванны данной вместимости V, если она имеет наименьшую площадь поверхности.

Решение. Ванна имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Обозначим его размеры через x, y, z (длина, ширина, высота). Так как объем $V = xyz$ задан, то $z = \dfrac{V}{xy}$.

Площадь поверхности ванны: $S = 2(xz + yz) + xy$. Подставляем значение z и получаем функцию двух переменных: $S(x, y) = 2\left(x \cdot \dfrac{V}{xy} + y \cdot \dfrac{V}{xy} \right) + xy$ или $S(x, y) = 2V\left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x} \right) + xy$. Нужно найти точку минимума полученной функции, причем по смыслу задачи $x > 0,\ y > 0$.

Находим критические точки, используя необходимое условие экстремума: $\begin{cases} S'_x = 0, \\ S'_y = 0. \end{cases}$

В нашем случае $\begin{cases} -\dfrac{2V}{x^2} + y = 0, \\ -\dfrac{2V}{y^2} + x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2V}{x^2}, \\ -\dfrac{2V\ x^4}{(2V)^2} + x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{2V}, \\ y = \sqrt[3]{2V}. \end{cases}$

Вычисляем вторые производные и находим значение дифференциала второго порядка в критической точке: $S''_{xx} = \dfrac{4V}{x^3}$, $S''_{yy} = \dfrac{4V}{y^3}$, $S''_{xy} = 1$,

$d^2S = \dfrac{4V}{(\sqrt[3]{2V})^3}(dx)^2 + 2dx\,dy + \dfrac{4V}{(\sqrt[3]{2V})^3}(dy)^2 = 2(dx)^2 + 2dx\,dy + 2(dy)^2 > 0$. Значит, функция $S(x,\ y)$ имеет минимум при $x = \sqrt[3]{2V}$, $y = \sqrt[3]{2V}$. Тогда $z = \dfrac{V}{(\sqrt[3]{2V})^2} = \dfrac{\sqrt[3]{2V}}{2}$.

Задача 12. Показать, что касательные плоскости к поверхности $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ отсекают на осях координат отрезки, сумма квадратов которых постоянна и равна a^2.

Решение. Уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x,\ y,\ z) = 0$ в точке $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$: $F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0.$

Запишем исходное уравнение в виде $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} - a^{2/3} = 0$ (5).

Тогда $F = x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} - a^{2/3}$, $F'_x = \dfrac{2x^{-1/3}}{3}$, $F'_y = \dfrac{2y^{-1/3}}{3}$, $F'_z = \dfrac{2z^{-1/3}}{3}$. Составляем уравнение касательной плоскости к поверхности в произвольной точке M_0, причем координаты этой точки удовлетворяют равенству (5):

$$\frac{2x_0^{-1/3}}{3}(x - x_0) + \frac{2y_0^{-1/3}}{3}(y - y_0) + \frac{2z_0^{-1/3}}{3}(z - z_0) = 0, \qquad (6).$$

Чтобы найти отрезки, которые касательная плоскость отсекает на осях координат, запишем соответствующее уравнение плоскости в отрезках. Преобразуем уравнение (6): $x_0^{-1/3}(x - x_0) + y_0^{-1/3}(y - y_0) + z_0^{-1/3}(z - z_0) = 0, \Rightarrow$

$$\frac{x}{x_0^{1/3}} - x_0^{2/3} + \frac{y}{y_0^{1/3}} - y_0^{2/3} + \frac{z}{z_0^{1/3}} - z_0^{2/3} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{x_0^{1/3}} + \frac{y}{y_0^{1/3}} + \frac{z}{z_0^{1/3}} = x_0^{2/3} + y_0^{2/3} + z_0^{2/3},$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x_0^{1/3}} + \frac{y}{y_0^{1/3}} + \frac{z}{z_0^{1/3}} = a^{2/3}, \quad \Rightarrow \frac{x}{x_0^{1/3}a^{2/3}} + \frac{y}{y_0^{1/3}a^{2/3}} + \frac{z}{z_0^{1/3}a^{2/3}} = 1.$$

Тогда плоскость отсекает на осях координат отрезки: $x_0^{1/3}a^{2/3}$, $y_0^{1/3}a^{2/3}$, $z_0^{1/3}a^{2/3}$.

Составляем сумму квадратов полученных отрезков:

$$\left(x_0^{1/3}a^{2/3}\right)^2 + \left(z_0^{1/3}a^{2/3}\right)^2 + \left(z_0^{1/3}a^{2/3}\right)^2 = a^{4/3}\left(x_0^{2/3} + y_0^{2/3} + z_0^{2/3}\right) = a^{4/3}\left(a^{2/3}\right) = a^2.$$

Индивидуальные задания по теме «Функции нескольких переменных»

Вариант 1

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x,y)=3^{\ln\left(-x^2-y^2-4x\right)}+\frac{1}{\sqrt[4]{xy}}.$$

2. Линеаризовать функцию $f(x,y,z)=e^{\sin x}(y+z^2)+z\ln(x^2+y^2+3z)$ в окрестности точки $A(0;0;1)$.

3. Является ли в точке $(0,0)$ функция $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^4+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$?

4. Найти $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$, если $\omega=f\left(\dfrac{x}{y},\,y\right)$, где $f(u,v)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

5. Доказать, что $a\cdot z'_x+b\cdot z'_y=c$, если $f\left(cx-az,\,cy-bz\right)=0$ и $f(u,v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Найти $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ при $x=1$, $y=-1$, если функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ определяются системой $\begin{cases}xu+yv=0,\\ uv-xy=5,\end{cases}$ причем $u(1;-1)=v(1;-1)=2$.

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$;

б) функцию $f(x,y,z)=x+\dfrac{y^2}{4x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{2}{z}$ $\quad(x>0,\,y>0,\,z>0)$;

в) функцию $z(x,y)$, заданную неявно уравнением $z^3-xyz=8$.

8. Исследовать на экстремум функцию $f\left(x,y,z\right)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x,y,z)=2x-2y-z$, $x^2+y^2+z^2=36$;

б) $f(x,y,z)=x^2-2y+z^2$, $x^2+y^2=4$, $y-2z-1=0$ $\left(x\neq 0\right)$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)=x^2+3y^2-x+18y-4$ в треугольнике с вершинами в точках $A(-2;-2)$, $B(2;-2)$, $C(2;2)$.

10. Представить положительное число a в виде суммы четырех положительных чисел так, чтобы произведение их обратных величин было наименьшим.

11. Для поверхности $x^2+2y^2+3z^2=21$ найти уравнение нормали, ортогональной плоскости $x+4y+6z=0$.

Вариант 2

1.Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x,y)=\lg\sqrt[3]{\frac{x^2-y-1}{x-y}}.$$

2.Линеаризовать функцию $f(x,y,z)=\sin\dfrac{xz^2}{x+y}+e^{x+2y-z}$ в окрестности точки $A(1;1;0)$.

3.Является ли в точке $(0,0)$ функция $f(x,y)=\begin{cases}(1+xy)^{1/\left(x^2+y^2\right)}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 1, & x^2+y^2=0\end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$?

4.Найти $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}$, если $\omega=f\left(x,\dfrac{x}{y}\right)$, где $f(u,v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

5.Показать, что $(y-z)\cdot z'_x+(z-x)\cdot z'_y=x-y$, если $f\left(x^2+y^2+z^2\right)=x+y+z$ и $f(u)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6.Найти $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ при $x=y=1$, если функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ определяются системой $\begin{cases}xu-yv=0,\\ yu+xv=2,\end{cases}$ причем $u(1;1)=v(1;1)=1$.

7.Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x,y)=x^2+xy+y^2-3\ln x-3\ln y$;

б) функцию $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$;

в) функцию $z(x,y)$, заданную неявно уравнением $e^z-x^2z-y^2z=e$.

8.Исследовать на экстремум функцию $f(x,y,z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3$, $x^2+y^2+z^2=1$ $(x>0,y>0,z>0)$;

б) $f(x,y,z)=xz+y$, $x+y+z=1$, $x^2+y^2+z^2=1$.

9.Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)=x^2-xy+y^2+x-2y$, если $0\le x\le 1$, $0\le x+y\le 1$.

10. Доказать, что среднее геометрическое трех положительных чисел, сумма которых постоянна, не превосходит их среднего арифметического.

11. На поверхности $x^2+2y^2+3z^2+2xy+2xz+4yz=8$ найти точки, в которых нормаль параллельна оси Oz.

Вариант 3

1.Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x, y) = e^{\sqrt[4]{x-y^2-4y+3}} + \ln(-x-2y).$$

2.Линеаризовать функцию $f(x, y, z) = \ln\dfrac{yx^2}{z+y} + 5^{z^2+3x-y}$ в окрестности точки $A(1;1;1)$.

3. Является ли в точке $(0,0)$ функция $f(x, y) = \begin{cases} (1+xy)^{\frac{1}{|x|+|y|}}, & |x|+|y| \neq 0, \\ 1, & x = y = 0, \end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$?

4.Найти $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}$, если $\omega = f\left(x+y,\, xy\right)$, где $f\left(u,v\right)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

5.Доказать, что $\left(x-1\right)\cdot z'_x + \left(y+2\right)\cdot z'_y = z$, если $f\left(\dfrac{x-1}{z}, \dfrac{y+2}{z}\right) = 0$ и $f(u,v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6.Найти $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ при $x=1$, $y=2$, если функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ определяются системой $\begin{cases} xe^{u+v} + 2uv = 1, \\ ye^{u-v} - \dfrac{u}{1+v} = 2x, \end{cases}$ причем $u(1;2) = v(1;2) = 0$.

7.Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 18x - 30y$;

б) функцию $f(x, y, z) = x^3 - y^2 - z^2 + yz - 3x + 6y$;

в) функцию $z(x, y)$, заданную неявно уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$$

8.Исследовать на экстремум функцию $f\left(x, y, z\right)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z$, $x - y + z^2 = 3$;

б) $f(x, y, z) = x^2 + z^2 - 2y$, $2x + y^2 + 1 = 0$, $y - 2z + 9 = 0$.

9.Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 2x + 18y - 4$ в области: $-1 \le y \le 1$, $-y-2 \le x \le 0$.

10. Найти три положительных числа, произведение которых наибольшее, если сумма их равна a.

11. Для поверхности $z = 4x - xy + y^2$ найти уравнение касательной плоскости, параллельной плоскости $4x + 2y - 2z + 9 = 0$.

Вариант 4

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x,y)=2^{\log_3(4x^2-y^2)}+\sqrt{4y-x^2-y^2}\,.$$

2. Является ли в точке $(0,0)$ функция $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^3}{x^6+y^6}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x,y,z)=\operatorname{sh}\dfrac{x-y}{z^2}+\ln(x^2-y^2+4z)$ в окрестности точки $A(0;0;2)$.

4. Проверить равенство $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, если

$$u(x,y)=x\cdot\varphi(x+y)+y\cdot\psi(x+y).$$

5. Доказать, что $x\cdot z'_x+y\cdot z'_y=z-xy$, если $f\left(x+\dfrac{z}{y},\ y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ и $f(u,v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ при $x=y=1$, если функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ заданы системой $\begin{cases}u+v=x+y-2+\pi/2,\\ y\sin u=x\sin v,\end{cases}$ причем $u(1;1)=v(1;1)=\dfrac{\pi}{4}$.

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x,y)=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$;

б) функцию $f(x,y,z)=x+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{16}{z}$ $\quad(x>0,\ y>0,\ z>0)$;

в) функцию $z(x,y)$, заданную неявно уравнением $e^z-xy+z+x^2+y^2-1=0$.

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x,y,z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x,y,z)=x+y+z$, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$;

б) $f(x,y,z)=xyz$, $x+y+z=1$, $x^2+y^2+z^2=1$.

9. В треугольнике с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(2;2)$, $C(2;-2)$ найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$.

10. Доказать, что сумма трех положительных чисел, имеющих данное произведение будет наименьшей, если все эти числа равны между собой.

11. На поверхности $x^2+y^2-z^2+2x=0$ найти точки, в которых касательная плоскость параллельна координатной плоскости XOY.

Вариант 5

1.Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x,y)=5^{\sqrt[4]{2x-x^2-y^2}}-\sqrt{xy^3}.$$

2.Является ли в точке $(0,0)$ функция $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^6+y^3}, & x^6+y^3\neq 0,\\ 0, & x^6+y^3=0,\end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$?

3.Линеаризовать функцию $f(x,y,z)=\arcsin\dfrac{y}{\sqrt{x^2+z^2}}$ в окрестности точки $A(-1;0;1)$.

4.Доказать, что если $z=f(x-y)$, где $f(u)$– дважды дифференцируемая функция, то

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

5.Найти z'_x, z'_y, если $f\left(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2\right)=0$ и $f(u,v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6.Найти $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ при $x=y=1$, если функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ заданы системой $\begin{cases}e^{u/x}\cdot\cos\dfrac{v}{y}=\dfrac{x}{\sqrt{2}},\\ e^{u/x}\cdot\sin\dfrac{v}{y}=\dfrac{y}{\sqrt{2}},\end{cases}$ причем $u(1;1)=0$, $v(1;1)=\dfrac{\pi}{4}.$

7.Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x,y)=x^3+3xy^2-51x-24y$;

б) функцию $f(x,y,z)=xy^2z^3(1-x-2y-3z)\quad(x>0,\ y>0,\ z>0)$;

в) функцию $z(x,y)$, заданную неявно уравнением

$$2(x^2+z^2)+3(2y^2+1)+4(xz-y)-4x=0.$$

8.Исследовать на экстремум функцию $f(x,y,z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x,y,z)=x^2+4y+z^2$, $2x-y^2+4z=6$;

б) $f(x,y,z)=4x+2y+z$, $x^2+y-1=0$, $y^2+z-2=0$.

9.Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)=4xy-2x^2-y^2x$ в области: $x+y\le 4$, $x\ge -1$, $y\ge 0$.

10. Положительное число a разложить на три положительных слагаемых x, y, z так, чтобы произведение xy^2z^3 было максимальным.

11. Для поверхности $x^2-z^2-2x+6y=8$ найти уравнение нормали, параллельной прямой $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{4}.$

Вариант 6

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x,y)=\frac{\ln(x-3)}{\sqrt{y^2-x^2-4}}$$

2. Является ли в точке $(0,0)$ функция $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-y^3x}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0\end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x,y,z)=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1+xy}+z\ln(z+x^2+y^2)$ в окрестности точки $A(0;0;1)$.

4. Доказать, что функция $z=x\cdot\varphi(y/x)+y\cdot\psi(y/x)$ удовлетворяет уравнению

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

5. Найти z'_x, z'_y, если $f\left(x+y,\ y+z,\ z-x\right)=0$ и $f(u,v,w)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Найти $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $x=1$, $y=2$, если функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ заданы системой $xu+yv=0,\quad x+y=-u-v-3,$ причем $u(1;2)=v(1;2)=0$.

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$;

б) функцию $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$;

в) функцию $z(x,y)$, заданную неявно уравнением

$$\frac{x^3}{3}+12y^2-z^2x+z-4y=0\quad (x>0,\ z>0).$$

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x,y,z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x,y,z)=x+2y+z/2,\quad x^2+y^2+z^2=21$;

б) $f(x,y,z)=xyz,\ x+y+z=0,\quad x^2+y^2+z^2=6$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)=x^2-xy+y^2$, если $|x|+|y|\le 1$.

10. В сегмент эллиптического параболоида $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=\dfrac{z}{2}$, $z=2$ вписан параллелепипед. При каких размерах параллелепипеда его объем будет максимальным?

11. Найти углы, которые образует с осями координат нормаль к поверхности $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ в точке $M\left(1;1;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Вариант 7

1.Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{36-4x^2-9y^2}}{\ln(x+y).}$$

2.Является ли в точке $(0,0)$ функция $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}, & x^6+y^2\neq 0,\\ 0, & x^6+y^2=0,\end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$?

3.Линеаризовать функцию $f(x,y,z)=(\sin x)^{\cos y}+e^{z^2-xy}$ в окрестности точки $A\left(\dfrac{\pi}{2};0;-1\right)$.

4.Найти $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial x^2}$, если $\omega=f\left(x-y,\dfrac{y}{x}\right)$, где $f(u,v)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

5.Показать, что $\left(x^2-y^2-z^2\right)\cdot z'_x+2xy\cdot z'_y=2xz$, если $x^2+y^2+z^2=y\,f\left(\dfrac{z}{y}\right)$ и $f(u)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6.Найти $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ при $x=1$, $y=0$, если функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ заданы системой $\begin{cases}u+v=x+y+1,\\ xu+yv=3,\end{cases}$ причем $u(1;0)=-1$, $v(1;0)=3$.

7.Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x,y)=3x^2-x^3+3y^2+4y$;

б) функцию $f(x,y,z)=3x^2+z^2-3y^2x+6xy-8z+5$;

в) функцию $z(x,y)$, заданную неявно уравнением $x^2+y^2+4xz+4+\dfrac{z^2+z}{2}=0$.

8.Исследовать на экстремум функцию $f(x,y,z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x,y,z)=x^3+y^2+z^2+5$, $3x^2+y+z=1$;

б) $f(x,y,z)=4x^2+y-2z$, $z^2+2x=0$, $2xy+1=0$.

9.Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)=xy-x^2-y^2+x-y$ в области: $-1\le y\le 0$, $-y-2\le x\le 1$.

10. Из всех треугольников с одинаковым основанием и одним и тем же углом при вершине найти наибольший по площади.

11. В какой точке эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ нормаль к нему образует равные углы с осями координат?

Вариант 8

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\lg(1-x^2-y^2).}$$

2. Является ли в точке $(0,0)$ функция $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0\end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x,y,z)=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ в окрестности точки $A(-1;1;1)$.

4. Найти $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial x^2}$, если $\omega=f(x-y,\,xy)$, где $f(u,v)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

5. Найти $z'_x,\,z'_y$, если $f(x-2y,\,y-3z,\,z-x)=0$ и $f(u,v,w)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Найти $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial^2v}{\partial y^2}$ при $x=y=1$, если функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ заданы системой $xu^2+yv^2=2,\quad xv^2-yu^2=0$, причем $u(1;1)=v(1;1)=1$.

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$;

б) функцию $f(x,y,z)=2x^2+2y^2+2xy-4x+z^2-2z-5y$;

в) функцию $z(x,y)$, заданную неявно уравнением $z^2+xyz-xy^2-x^3=0$.

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x,y,z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x,y,z)=e^{xyz}$, $x+2y-3z=6$, $(x>0,\,y>0,\,z>0)$;

б) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)$, $x+y+z=2$, $2x+y+2z=3$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)=x^2+2y^2$, если $x^2+y^2\le 100$.

10. Тело состоит из прямого кругового цилиндра, завершенного прямым круговым конусом. Площадь полной поверхности тела $S=4\pi\left(3+\sqrt{5}\right)$. Определить радиус основания, высоту цилиндра и высоту конуса, таким образом, чтобы объем тела был наибольшим.

11. Доказать, что касательные плоскости к поверхности $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ отсекают на осях координат отрезки, сумма длин которых есть величина постоянная.

Вариант 9

1.Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+2y}+\ln(4-x^2-y).$$

2.Является ли в точке $(0,0)$ функция $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$?

3.Линеаризовать функцию $f(x,y,z)=\operatorname{sh}\dfrac{x+y}{z^2}+3^{x^3-2xy+z}$ в окрестности точки $A(0;0;-1)$.

4.Найти $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$, если $\omega=f\left(\dfrac{x}{y},y\right)$, где $f(u,v)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

5.Найти z'_x, z'_y, если $f\left(x-y+z,\,x^2+y-z^2\right)=0$ и $f(u,v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6.Найти $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ при $x=1$, $y=1$, если функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ заданы системой $\begin{cases}e^u\cdot\cos(v^2)=x^2+y^2-1,\\ e^v\cdot\cos(u^2)=x^2-y^2+1,\end{cases}$ причем $u(1;1)=v(1;1)=0$.

7.Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x,y)=(x-y+1)^2-4x+\dfrac{y^3}{3}$;

б) функцию $f(x,y,z)=2x^3+y^3+4z^2-3y^2-8xz-8x+5$;

в) функцию $z(x,y)$, заданную неявно уравнением

$$x^2+y^2+z^2+4x-2y-4z-7=0.$$

8.Исследовать на экстремум функцию $f(x,y,z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x,y,z)=x+y+z$, $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}=3$;

б) $f(x,y,z)=xyz$, $x+y-z=4$, $x-y-z=8$.

9.Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)=x^2-y^2-xy-3x-y$ в области: $y\geq x-2$, $x\geq 0$, $y\leq 1$.

10. Даны три точки $A(4;0;4)$, $B(4;4;4)$, $C(4;4;0)$. На сфере $x^2+y^2+z^2=4$ найти точку S такую, чтобы объем пирамиды $SABC$ был наибольшим.

11. В каких точках эллипсоида $x^2+2y^2+3z^2=21$ касательные плоскости параллельны плоскости $x+4y+6z=0$?

Вариант 10

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x, y) = \sqrt[8]{9 - x^2 - y} + y / \sqrt{4x^2 - y^2}.$$

2. Является ли в точке $(0, 0)$ функция $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x\,y)}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x, y, z) = \operatorname{ch}\dfrac{z}{(x+y)^2} - z^{x-y}$ в окрестности точки $A(-1; -1; 2)$.

4. Проверить выполнение равенства $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ для функции $f(x,y) = x \cdot \varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$, где $\varphi(u)$ произвольная дважды дифференцируемая функция.

5. Доказать, что $2z'_x - 3z'_y = 1$, если $f\left(x - 2z,\ y + 3z\right) = 0$ и $f(u,v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ при $x = \pi$, $y = 0$, если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ заданы системой $\begin{cases} x^2 u^3 + y^2 v = \sin x + \pi^2, \\ x v^3 - y^2 u = \cos x + \pi + 1, \end{cases}$ причем $u(\pi; 0) = v(\pi; 0) = 1$.

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x\,y$;

б) функцию $f(x, y, z) = 2x^3 - x^2 + x\,y^2 - 4x + 4z^2 - 2z \quad (x > 0)$;

в) функцию $z(x, y)$, заданную неявно уравнением

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8yz - z + 8 = 0.$$

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y, z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x, y, z) = \dfrac{x^3}{3} + y + \dfrac{z^2}{2}$, $x^2 - y^2 - z^2 = 1$;

б) $f(x, y, z) = (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2$, $x^2 + y^2 = -2z$, $x + y + z = 1$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в области $x \le 0$, $y \le 0$, $x + y \ge -3$.

10. В эллипсоид $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{12} + z^2 = 1$ вписать параллелепипед наибольшего объема.

11. Доказать, что касательные плоскости к поверхности $x\,y\,z = a^3$ $(a > 0)$ образуют с координатными плоскостями тетраэдр постоянного объема.

Вариант 11

1.Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x, y)=\frac{\sqrt{4y^2+4x^2+8y-5}}{\ln(-x-y).}$$

2.Является ли в точке $(0,0)$ функция $f(x, y)=\begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2+y^2}}, x^2+y^2>0, \\ 0, \quad x=y=0 \end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$?

3.Линеаризовать функцию $f(x, y, z)=e^{\sin y}\cdot\left(x+z^2\right)+x\cdot\ln\left(z^2+3x\right)$ в окрестности точки $A(0;\pi/2;1)$.

4.Найти $\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial z}$, если $\omega=f\left(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2\right)$, где $f(u,v)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

5.Доказать, что $4z'_x-z'_y=2$, если $f\left(2x-4z,\ 2y+z\right)=0$ и $f(u,v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6.Функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ заданы системой: $\begin{cases} u\sin v+v\sin u=x^2+y^2-2, \\ u\cos v+v\cos u=x^2-y^2+p. \end{cases}$

Найти $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ при $x=y=1$, если $u(1;1)=0$, $v(1;1)=\pi$.

7.Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x, y)=x^3+y^2-3x^2y+10y$;

б) функцию $f(x,y,z)=xyz(4a-x-y-z)$ $(a>0, x>0,\ y>0,\ z>0)$;

в) функцию $z(x, y)$, заданную неявно уравнением $x^2+5z^2+y^2-4xz-2y=0$.

8.Исследовать на экстремум функцию $f(x,y,z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x, y, z)=xy^2z^3$, $x+2y+3z=6$, $(x>0,\ y>0,\ z>0)$;

б) $f(x, y, z)=x^2+yz$, $x^2+y^2=8$, $4x-y+z=0$.

9.Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y)=x^3-y^3-9xy-27$ в области: $0\le x\le 3$, $0\le y\le x$.

10. Найти точку S в области: $0\le y\le 1-x$, $0\le x\le 1$, $z=0$, расстояние от которой до плоскости $\frac{x}{7}+\frac{y}{6}+\frac{z}{1}=1$ наименьшее.

11. Найти уравнение касательной прямой и нормальной плоскости в точке $M(1;-2;1)$ к кривой $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6, \\ x+y+z=0. \end{cases}$

Вариант 12

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции
$$f(x,y)=\frac{2x-3y}{\ln(x-2)}-\sqrt[4]{x+y^2+4y-3}.$$

2. Является ли в точке $(0,0)$ функция $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x+y)^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$ непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x,y,z)=\sin\dfrac{zx^2}{z+y}+e^{2y+z-x}$ в окрестности точки $A(0;1;1)$.

4. Найти $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial x^2}$, если $\omega=f(x-y,xy)$, где $f(u,v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

5. Доказать, что $x\cdot z'_x+y\cdot z'_y=z-xy$, если $f\left(x+\dfrac{z}{y},\ y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ и $f(u,v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ при $x=1$, $y=0$, если функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ определяются системой: $\begin{cases}x\cdot e^{u^2}+uv=e,\\ y\cdot e^{v^2}-uv=x-1,\end{cases}$ причем $u(1;0)=1$, $v(1;0)=0$.

7. Исследовать на локальный экстремум:
   а) функцию $f(x,y)=xy^2(1-x-y)$ $\quad(y>0)$;
   б) функцию $f(x,y,z)=x+\dfrac{y^2}{4x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{2}{z}$;
   в) функцию $z(x,y)$, заданную уравнением $6x^2+6y^2+6z^2+4x-8y-8z+5=0$.

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x,y,z)$ при указанных ограничениях:
   а) $f(x,y,z)=x^2y+z$, $\quad 8xy+4y^2+z^2+11=0$ $\quad(z>0)$;
   б) $f(x,y,z)=xy+xz$, $\quad x^2+y^2=4$, $y+z=2$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)=x\cdot e^{y+x\cdot\sin y}$ в области: $-1\le x\le 1$, $0\le y\le \pi/6$.

10. Известны длины стон a и b треугольника и угол φ между ними. Разделить этот треугольник на две части равной площади отрезком прямой, пересекающим заданные стороны и имеющим наименьшую длину.

11. Через точку $M(1;2;2)$ провести плоскость, образующую с плоскостями координат тетраэдр наименьшего объема.

Вариант 13

1.Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x,y)=\frac{\ln(x^2+y^2-2x-8)}{\sqrt[4]{4-x-y^2.}}$$

2.Является ли в точке $(0,0)$ функция $f(x,y)=\begin{cases}(1+x^2y^2)^{1/(x^2+y^2)}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 1, & x^2+y^2=0\end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$?

3.Линеаризовать функцию $f(x,y,z)=\cos\frac{zx}{y}+5^{y^2+3x-z}$ в окрестности точки $A(1;1;0)$.

4.Найти $\frac{\partial^2\omega}{\partial y\partial x}$, если $\omega=f\left(x+y,\,xy\right)$, где $f\left(u,v\right)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

5.Доказать, что $\left(x-1\right)\cdot z'_x+\left(y+2\right)\cdot z'_y=z$, если $f\left(\frac{x-1}{z},\frac{y+2}{z}\right)=0$ и $f(u,v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6.Функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ заданы системой $\begin{cases}x\,\mathrm{tg}\,u+y\,\mathrm{tg}\,v=0,\\ x\ln u+y\ln v=2\ln\pi+\ln 2.\end{cases}$

Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ при $x=y=1$, если $u(1;1)=2\pi$, $v(1;1)=\pi$.

7.Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x,y)=2xy+\left(1-x-y\right)\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)$, $\left(x>0,\ y>0\right)$;

б) функцию $f(x,y,z)=x^3+y^2+z^2-6xy+2z+15x$;

в) функцию $z(x,y)$, заданную неявно уравнением

$$5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2xz-2yz-72=0.$$

8.Исследовать на экстремум функцию $f\left(x,y,z\right)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x,y,z)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$, $\quad\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=3$;

б) $f(x,y,z)=y^2+xz$, $x+4y-z=0$, $y^2+z^2=18$.

9.Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)=x^2+2xy-4\ln x-2\ln y$ в области: $1\le x\le 2y$, $y\le 1$.

10. Найти наибольшее расстояние между точками поверхности $2x^2+3y^2+2z^2+2xz-6=0$ и плоскостью $z=0$.

11. Найти уравнение касательной прямой и нормальной плоскости в точке $M\left(1;1;1\right)$ к кривой $\begin{cases}y=x,\\ z=x^2.\end{cases}$

Вариант 14

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x;y)=\frac{\sqrt{y^2-x^2}}{y^2}+\ln x.$$

2. Является ли в точке $(0,0)$ функция $f(x,y)=\begin{cases}(1+xy)^{\frac{1}{|x|+|y|}}, & |x|+|y|\neq 0,\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x,y,z)=z^y\cdot\ln(x-1)$ в окрестности точки $A(2;1;2)$.

4. Найти $\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}$, если $\omega=f\left(x-y,\frac{y}{x}\right)$, где $f(u,v)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

5. Найти z'_x, z'_y, если $f\left(x+3y,\ y+2z,\ z-x\right)=0$ и $f(u,v,w)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Найти $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ в точке $x=0$, $y=1$, если $u(x,y)$ и $v(x,y)$ задаются системой: $\begin{cases}uv+u^2v^2=xy,\\ xuv+yv^2=x+y,\end{cases}$ причем $u(0;1)=0$, $v(0;1)=1$.

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x,y)=x^3y^2(6-x-y)$ $(x>0,\ y>0)$;

б) функцию $f(x,y)=-x^2-y^2-4z^2-x^2y^2+\frac{5}{4}(x+y)-z,$;

в) функцию $z(x,y)$, заданную неявно уравнением

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0.$$

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x,y,z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x,y,z)=x-2y+z$, $x^2+y^2-z^2=1$;

б) $f(x,y,z)=xyz$, $x^2+y^2=2z$, $x^2+y^2+z^2=8$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$ в области: $\sqrt{x}\le y\le 1$, $0\le x\le 1$.

10. Найти треугольник данного периметра $2p$, который вращением вокруг одной из своих сторон образует тело наибольшего объема.

11. Показать, что плоскости, касательные к поверхности $z=x\cdot f\left(\frac{y}{x}\right)$, проходят через одну и ту же точку.

Вариант 15

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции
$$f(x;y)=\frac{\lg(-x-y)}{\sqrt{x^2+2x+y.}}$$

2. Является ли в точке $(0,0)$ функция $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x,y,z)=\arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ в окрестности точки $A(-1;1;0)$.

4. Найти $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial y\,\partial z}$, если $\omega=f\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{z}\right)$, где $f(u,v)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

5. Найти $z'_x,\, z'_y$, если $f\left(x+y-z,\, x-y+z^2\right)=0$ и $f(u,v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ заданы системой $\begin{cases}\ln(u+v)+xu=1,\\ \ln(u+v)+yv=0.\end{cases}$.

Найти $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ при $x=y=1$, если $u(1;1)=1$, $v(1;1)=0$.

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x,y)=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$;

б) функцию $f(x,y,z)=x^3-y^2+2z^2-yz-\ 3xy-3z-21x$;

в) функцию $z(x,y)$, заданную неявно уравнением $x^2+2y^2+z^2-2xy+3z-6x=0$.

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x,y,z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x,y,z)=xy^2z^3$, $x+3y^2+9z^3=1$ $(x>0, y>0, z>0)$;

б) $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2$, $x^2+y+2=0$, $3z-2y=7$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)=y\sqrt{1+x}+x\sqrt{1+y}$ в области: $-1\le y\le 1$, $-1\le x\le 1$.

10. Найти точку S в области: $-1\le z\le 1$, $2y+x=2$, $1\le x\le 2$, расстояние от которой до плоскости $z-7x-y=0$ наименьшее.

11. Найти уравнение касательной прямой и нормальной плоскости в точке $M(1;-1;2)$ к кривой $\begin{cases}2x^2+3y^2+z^2=9,\\ 3x^2+y^2-z^2=0.\end{cases}$

Вариант 16

1.Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x, y)=\sqrt{y^2+x^2-x}+\ln\left(2x-x^2-y^2\right).$$

2.Является ли в точке $(0,0)$ функция $f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x=y=0\end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$?

3.Линеаризовать функцию $f(x, y, z)=x^y\ln(x+y+z^2)$ в окрестности точки $A(1;1;1)$.

4.Найти $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}$, если $\omega=f\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{x}\right)$, где $f(u,v)$ – дважды дифференцируемая функция.

5.Доказать, что $z'_x+2z'_y=3$, если $f\left(3x-z, 3y-2z\right)=0$ и $f(u,v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6.Функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ заданы системой: $\begin{cases}u+v=x+y,\\ xu+yv=1.\end{cases}$ Найти $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$

при $x=0$, $y=1$, если $u(0;1)=1$, $v(0;1)=0$.

7.Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x, y)=\dfrac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$;

б) функцию $f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+z^2+\dfrac{256}{x}$ $\left(x>0,\ y>0,\ z>0\right)$;

в) функцию $z(x, y)$, заданную неявно уравнением

$$x^2+y^2+3z^2+xy-x+3y-z-7/3=0 \quad \left(z>0\right).$$

8.Исследовать на экстремум функцию $f\left(x,y,z\right)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x, y)=xy^2z^3$, $x+y+z=12$ $\left(x>0,\ y>0,\ z>0\right)$;

б) $f(x, y, z)=xyz$, $x+y+z=5$, $xy+yz+zx=8$.

9.Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2+3y^2+2xy-4x+8y$ в области: $x\ge 0$, $y\ge -x$, $y\le x$, $x\le 5$.

10. Если в электрической цепи, имеющей сопротивление R, течет ток I, то количество тепла, выделяющееся в единицу времени, пропорционально I^2R. Определить, как надо разветвить ток I на токи I_1, I_2, I_3 с помощью трех проводов, сопротивление которых R_1, R_2, R_3, чтобы выделение тепла было наибольшим.

11. На поверхности $x^2+y^2+5z^2=28$ найти точки, касательные плоскости в которых параллельны плоскости $2x+2y+10z=11$.

Вариант 17

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x;y)=\frac{y}{\ln(x+y)}+\sqrt{y-x^2-4x-3}.$$

2. Является ли в точке $(0,0)$ функция $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2-x^2}{y^2+x^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0\end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x,y,z)=\ln(1-x-y-z)+e^{x-y+z}$ в окрестности точки $A(0;0;-2)$.

4. Найти $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial z}$, если $\omega=f\left(x+y,\dfrac{x+y}{z}\right)$, где $f(u,v)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

5. Найти z'_x, z'_y, если $f(y-x,\ y+z,\ x-3z)=0$ и $f(u,v,w)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ заданы системой $\begin{cases}uv+2xy=1,\\ x^2u-y^2v=-1.\end{cases}$

Найти $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2v}{\partial x^2}$ при $x=y=1$, если $u(1;1)=v(1;1)=1$.

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x,y)=\dfrac{x^3}{3}-3x^2-y^2+4xy$;

б) функцию $f(x,y,z)=2x^3+y^2+2z^2-2xz-2y-2x+3$;

в) функцию $z(x,y)$, заданную неявно уравнением $z^2+x^3-y^2-3x+4y+z-8=0$.

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x,y,z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$, $2x+3y+4z=39$;

б) $f(x,y,z)=2x-2y+z^2$, $2z-x^2+1=0$, $yx+2=0$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$ в области: $y\geq x-1$, $x\geq 0$, $y\leq 0$.

10. На части плоскости $x+y=0$, вырезанной цилиндром $x^2+(z-1)^2=9$, найти точку, сумма квадратов расстояний до которой от точек $A(0;4;1)$ и $B(2;-5;1)$ наибольшая.

11. Найти точки на поверхности $\sqrt{(x^2+y^2)^3}-z^2=0$, в которых нормали к поверхности параллельны прямой $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z}{2}.$

Вариант 18

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x,y)=\frac{\lg(x^2+y^2-8)}{\sqrt{y^2-x^2-4.}}$$

2. Является ли в точке $(0,0)$ функция $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^{21/10}+y^{21/10})}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x,y,z)=\arccos\dfrac{xz^2}{\sqrt{x+y}}$ в окрестности точки $A(1;1;-1)$.

4. Найти $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial x\partial z}$, если $\omega= f(x^2+y,\,z)$, где $f(u,v)$ – дважды дифференцируемая функция.

5. Показать, что $(y-z)\cdot z'_x+(z-x)\cdot z'_y=x-y$, если $f\left(x^2+y^2+z^2\right)=x+y+z$ и $f(u)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ заданы системой $\begin{cases}uv-x^2y^2=1,\\ x^2u^2+y^2v^2=1.\end{cases}$

Найти $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ при $x=1$, $y=0$, если $u(1;0)=v(1;0)=1$.

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$;

б) функцию $f(x,y,z)=x+\dfrac{4y^3}{x^2}+\dfrac{3z}{y}+\dfrac{3}{z}$;

в) функцию $z(x,y)$, заданную неявно уравнением $18(x^2+y^2+z^2)=x^4+y^4+z^4$.

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x,y,z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x,y,z)=xyz$, $x^2+y^2+z^2=3$ $\quad(x>0,\ z>0)$;

б) $f(x,y,z)=x+y-z$, $4x^3+4y^3+4z^3+12x+12y+12z=13$, $x+y=1$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)=2x^2+y^2+2x-xy$ в области: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$.

10. Тело состоит из прямого кругового цилиндра, завершенного прямым круговым конусом. Площадь полной поверхности тела $S=20\pi\left(3+\sqrt{5}\right)$. Определить радиус основания, высоту цилиндра и высоту конуса, таким образом, чтобы объем тела был наибольшим.

11. Найти уравнения касательной прямой и нормальной плоскости в точке $M(0;1;-1/6)$ к кривой $\begin{cases}x^2/4-y^2/3=2z,\\ x-2y+2=0.\end{cases}$

Вариант 19

1.Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x;y)=\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt{y-x}}+\ln(y-x^2+4x-4).$$

2.Является ли в точке $(0,0)$ функция $f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x\,y)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$?

3.Линеаризовать функцию $f(x,\ y,\ z)=\operatorname{sh}\dfrac{x+z}{y}+3^{y^2-2xz}$ в окрестности точки $A(0;-1;0)$.

4.Найти $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial z}$, если $\omega=f\left(x+y^2,\ x\,y\,z\right)$, где $f\left(u,v\right)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

5.Найти $z'_x,\ z'_y$, если $f\left(x-y\,z,\ x\,y^2+z^2\right)=0$ и $f(u,v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6.Функции $u(x,\ y)$, $v(x,\ y)$ заданы системой $\begin{cases}u+v=x+y,\\ x^2\cos u=\left(y^2+x^2\right)\cos v.\end{cases}$ Найти $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$

при $x=\pi/2$, $y=0$, если $u\left(\pi/2;0\right)=v\left(\pi/2;0\right)=\pi/4$.

7.Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x,\ y)=\dfrac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$;

б) функцию $f(x,y,z)=(7-x-2y-3z)x\,y^2z^3\quad(x>0,\ y>0,\ z>0)$;

в) функцию $z(x,\ y)$, заданную неявно уравнением

$$x^2+y^2+z^2-x\,z-y\,z+2x+2y+2z+2=0.$$

8.Исследовать на экстремум функцию $f\left(x,y,z\right)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x,\ y,\ z)=x^2y^3z^4$, $2x+3y+4z=9\qquad(x>0,\ y>0,\ z>0)$;

б) $f(x,\ y,\ z)=x^2+y\,z,\quad x+y-z-1=0,\quad y^2+z^2-2=0\ \left(z>0\right)$.

9.Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,\ y)=(y-4x^2)\sqrt{1-y}$ в области: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$.

10. Даны три точки $A(1;0;1)$, $B(1;1;1)$, $C(1;1;0)$. В шаре $x^2+y^2+z^2\le 1$ найти точку S такую, чтобы объем пирамиды $SABC$ был наименьшим.

11. Найти уравнения касательной прямой и нормальной плоскости в точке $M(1;-4;4)$ к кривой $\begin{cases}28x^2+y^2-3z^2+4=0,\\ 16x^2+2y^2-3z^2=0.\end{cases}$

Вариант 20

1.Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x,y)=\frac{\log_3(8-x^2-y^2+2y)}{\sqrt{3-x^2-y}.}$$

2.Является ли в точке $(0,0)$ функция $f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\cdot\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$?

3.Линеаризовать функцию $f(x,y,z)=\ln\dfrac{x}{(z+y)^2}-x^{z-y}$ в окрестности точки $A(4;-1;-1)$.

4.Найти $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial x^2}$, если $\omega=f\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{z}\right)$, где $f(u,v)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

5.Найти z'_x, z'_y, если $f\left(x-y,\, 2y+z,\, z-3x\right)=0$ и $f(u,v,w)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6.Функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ заданы системой $\begin{cases}xu+uv+vy=0,\\ x^2+y^2+u^3+v^3=2.\end{cases}$

Найти $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $x=0$, $y=1$, если $u(0;1)=1$, $v(0;1)=0$.

7.Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x,y)=x^3+y^3+3x^2-3xy^2+3x-1$;

б) функцию $f(x,y,z)=z^3+2x^2+y^2-3zx+2xy-2x$;

в) функцию $z(x,y)$, заданную неявно уравнением $x^2+y^2+z^2-3zy-xy+2=0$.

8.Исследовать на экстремум функцию $f(x,y,z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x,y,z)=x^2+y^2+2z$, $2x+2y+(z-2)^2+3=0$;

б) $f(x,y,z)=xy+yz$, $x^2+y^2=2$, $z^2+y^2=2$.

9.Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)$ в области: $x^2\le y\le 2x^2$, $0\le x\le 1$.

10. В области: $-1\le x\le 1$, $0\le y\le x^2$, $z=0$ найти точку, расстояние от которой до плоскости $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{4}-z+2=0$ наибольшее.

11. Найти уравнение касательной прямой и нормальной плоскости в точке $M(2;-1;1)$ к кривой $\begin{cases}y^2+z^2=x,\\ x+2y-z+1=0.\end{cases}$

Вариант 21

1.Найти и изобразить на плоскости область определения функции
$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+2y}+\ln(4-x^2-y).$$

2.Является ли в точке $(0,0)$ функция $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$?

3.Линеаризовать функцию $f(x,y,z)=\operatorname{sh}\dfrac{x+y}{z^2}+3^{x^3-2xy+z}$ в окрестности точки $A(0;0;-1)$.

4.Найти $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$, если $\omega=f\left(\dfrac{x}{y},y\right)$, где $f(u,v)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

5.Найти z'_x, z'_y, если $f\left(x-y+z,\, x^2+y-z^2\right)=0$ и $f(u,v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6.Найти $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ при $x=\pi$, $y=0$, если функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ заданы системой $\begin{cases}x^2u^3+y^2v=\sin x+\pi^2,\\ xv^3-y^2u=\cos x+\pi+1,\end{cases}$ причем $u(\pi;0)=v(\pi;0)=1$.

7.Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$;

б) функцию $f(x,y,z)=2x^3-x^2+xy^2-4x+4z^2-2z \quad (x>0)$;

в) функцию $z(x,y)$, заданную неявно уравнением
$$2x^2+2y^2+z^2+8yz-z+8=0.$$

8.Исследовать на экстремум функцию $f(x,y,z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x,y,z)=\dfrac{x^3}{3}+y+\dfrac{z^2}{2}$, $x+y+z=2$;

б) $f(x,y,z)=(x+1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2$, $x^2+y^2=-2z$, $x+y+z=1$.

9.Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)=x^2+y^2-xy+x+y$ в области $x\le 0$, $y\le 0$, $x+y\ge -3$.

10. В эллипсоид $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{12}+z^2=1$ вписать параллелепипед наибольшего объема.

11. Доказать, что касательные плоскости к поверхности $xyz=a^3$ $(a>0)$ образуют с координатными плоскостями тетраэдр постоянного объема.

Вариант 22

1.Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x,y)=\frac{2x-3y}{\ln(x-2)}-\sqrt[4]{x+y^2+4y+3}.$$

2.Является ли в точке $(0,0)$ функция $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^3}{x^3y^3+(x+y)^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$?

3.Линеаризовать функцию $f(x,y,z)=\sin\dfrac{zx^2}{z+y}$ в окрестности точки $A(0;1;1)$.

4.Найти $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial x^2}$, если $\omega=f(x-y,xy)$, где $f(u,v)$ –дифференцируемая функция.

5.Доказать, что $x\cdot z'_x+y\cdot z'_y=z-xy$, если $f\left(x+\dfrac{z}{y},\ y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ и $f(u,v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6.Найти $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ при $x=1$, $y=0$, если функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ определяются системой: $\begin{cases}x\cdot e^{u^2}+uv=e,\\ y\cdot e^{v^2}-uv=x-1,\end{cases}$ причем $u(1;0)=1$, $v(1;0)=0$.

7.Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x,y)=2xy+(1-x-y)\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}\right)$, $(x>0,\ y>0)$;

б) функцию $f(x,y,z)=x^3+y^2+z^2-6xy+2z+15x$;

в) функцию $z(x,y)$, заданную неявно уравнением

$$5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2xz-2yz-72=0.$$

8.Исследовать на экстремум функцию $f(x,y,z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$, $\quad\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}=3$;

б) $f(x,y,z)=y^2+xz$, $x+4y-z=0$, $y^2+z^2=18$.

9.Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)=x^2+2xy-4\ln x-2\ln y$ в области: $1\le x\le 2y$, $y\le 1$.

10. Найти наибольшее расстояние между точками поверхности $2x^2+3y^2+2z^2+2xz-6=0$ и плоскостью $z=0$.

11. Найти уравнение касательной прямой и нормальной плоскости в точке $M(1;1;1)$ к кривой $\begin{cases}y=x,\\ z=x^2.\end{cases}$

Вариант 23

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{36-4x^2-9y^2}}{\ln(x+y).}$$

2. Является ли в точке $(0,0)$ функция $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}, & x^6+y^2\neq 0,\\ 0, & x^6+y^2=0,\end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x,y,z)=(\sin x)^{\cos y}+e^{z^2-xy}$ в окрестности точки $A\left(\dfrac{\pi}{3};0;-1\right)$.

4. Найти $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial x^2}$, если $\omega=f\left(x-y,\dfrac{y}{x}\right)$, где $f(u,v)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

5. Доказать, что $4z'_x-z'_y=2$, если $f(2x-4z,\,2y+z)=0$ и $f(u,v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ заданы системой: $\begin{cases}u\sin v+v\sin u=x^2+y^2-2,\\ u\cos v+v\cos u=x^2-y^2+p.\end{cases}$

Найти $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ при $x=y=1$, если $u(1;1)=0$, $v(1;1)=\pi$.

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x,y)=x^3+y^2-3x^2y+10y$;

б) функцию $f(x,y,z)=xyz(4a-x-y-z)$ $(a>0, x>0, y>0, z>0)$;

в) функцию $z(x,y)$, заданную неявно уравнением $x^2+5z^2+y^2-4xz-2y=0$.

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x,y,z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x,y,z)=xy^2z^3$, $x+2y+3z=6$, $(x>0, y>0, z>0)$;

б) $f(x,y,z)=x^2+yz$, $x^2+y^2=8$, $4x-y+z=0$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)=x^3-y^3-9xy-27$ в области: $0\le x\le 3$, $0\le y\le x$.

10. Найти точку S в области: $0\le y\le 1-x$, $0\le x\le 1$, $z=0$, расстояние от которой до плоскости $\dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{6}+\dfrac{z}{1}=1$ наименьшее.

11. Найти уравнение касательной прямой и нормальной плоскости в точке $M(1;-2;1)$ к кривой $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6,\\ x+y+z=0.\end{cases}$

Вариант 24

1.Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x;y)=\frac{\sqrt{y^2-x^2}}{y^2}+\ln x.$$

2.Является ли в точке $(0,0)$ функция $f(x,y)=\begin{cases}(1+xy)^{\frac{1}{|x|+|y|}}, & |x|+|y|\neq 0,\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$?

3.Линеаризовать функцию $f(x,y,z)=z^y\cdot\ln(x-1)$ в окрестности точки $A(2;1;2)$.

4.Найти $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}$, если $\omega=f\left(x-y,\dfrac{y}{x}\right)$, где $f(u,v)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

5.Найти z'_x, z'_y, если $f(x+3y,\ y+2z,\ z-x)=0$ и $f(u,v,w)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6.Найти $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ в точке $x=0$, $y=1$, если $u(x,y)$ и $v(x,y)$ задаются системой:

$\begin{cases}uv+u^2v^2=xy,\\ xuv+yv^2=x+y,\end{cases}$ причем $u(0;1)=0$, $v(0;1)=1$.

7.Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x,y)=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$;

б) функцию $f(x,y,z)=x^3-y^2+2z^2-yz-3xy-3z-21x$;

в) функцию $z(x,y)$, заданную неявно уравнением

$$x^2+2y^2+z^2-2xy+3z-6x=0.$$

8.Исследовать на экстремум функцию $f(x,y,z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x,y,z)=xy^2z^3$, $x+3y^2+9z^3=1$ $(x>0,y>0,z>0)$;

б) $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2$, $x^2+y+2=0$, $3z-2y=7$.

9.Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)=y\sqrt{1+x}+x\sqrt{1+y}$ в области: $-1\le y\le 1$, $-1\le x\le 1$.

10. Найти точку S в области: $-1\le z\le 1$, $2y+x=2$, $1\le x\le 2$, расстояние от которой до плоскости $z-7x-y=0$ наименьшее.

11. Найти уравнение касательной прямой и нормальной плоскости в точке $M(1;-1;2)$ к кривой $\begin{cases}2x^2+3y^2+z^2=9,\\ 3x^2+y^2-z^2=0.\end{cases}$

Оглавление

Учебное издание

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ
Сборник типовых заданий
для студентов физических специальностей

Составители: Кравченко Нелли Михайловна, Михалева Марина Михайловна
Чердынцева Галина Алексеевна

Редактор

Компьютерная верстка М.М. Михалева

Пописано в печать		Формат 60×84 1/16
Бумага типограф-ская	Плоская печать	Усл. печ. л.
Уч.-изд. л.	Тираж экз Заказ	

Редакционно-издательский отдел ФГАОУ ВПО УрФУ
620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19

Ризография НИЧ ФГАОУ ВПО УрФУ
620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19