Федеральное агентство по образованию

Уральский государственный технический университет — УПИ

имени первого Президента России Б.Н.Ельцина

Е.Ф. Леликова

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Часть 2

Учебное пособие

Научный редактор — проф., д–р физ.-мат. наук А.Р. Данилин

Екатеринбург

УГТУ-УПИ

2008

УДК 517.14 (075.8)
ББК 22.161.1 я 73
М 62
Рецензенты:
кафедра математики Уральского государственного горного университета (зав. кафедрой, проф., д-р физ.-мат. наук В.Б. Сурнев);
д-р физ.-мат. наук Г.И. Шишкин (Институт математики и механики УрО РАН).

Леликова Е.Ф.
М 62 Методы математической физики: учебное пособие / Е.Ф. Леликова. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2008. Ч.2, 69 с.

ISBN 978-5-321-01448-6

Рассмотрены применение метода интегральных преобразований для решения задач математической физики, а также основные понятия вариационного исчисления. Разобраны типовые примеры.

Учебное пособие предназначено для студентов физических специальностей физико-технического факультета.

Библиогр.: 5 назв.

Подготовлено кафедрой "Вычислительные методы и уравнения математической физики
при поддержке физико-технического факультета

УДК 517.2 (075.8)
ББК 22.161. я 73

ISBN 978-5-321-01448-6

1. Интегральные преобразования

Интегральным преобразованием $\mathcal{F}$ называют преобразование, которое каждой функции $f(x)$ из некоторого класса ставит в соответствие функцию $F(s)$ (зависящую от новой переменной s) по формуле

$$\mathcal{F}(f(x)) = \int\limits_a^b K(s,x)f(x)dx = F(s).$$

Функция $K(s,x)$ называется **ядром** интегрального преобразования и является основным элементом, отличающим одно интегральное преобразование от другого. Пределы интегрирования a и b, а также класс рассматриваемых функций $f(x)$ зависят от вида преобразования. Функцию $F(s)$ называют **образом** или **изображением** функции $f(x)$ при данном интегральном преобразовании, а функцию $f(x)$ — **прообразом** функции $F(s)$. С преобразованием $\mathcal{F}$, которое называют **прямым**, связано **обратное** преобразование $\mathcal{F}^{-1}$, которое восстанавливает первоначальную функцию $f(x)$ по её образу $F(s)$

$$\mathcal{F}^{-1}(F(s)) = f(x).$$

Прямое и обратное преобразования $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$ называют **парой** преобразований.

Каждое интегральное преобразование обладает теми или иными свойствами, связанными с выбором ядра данного преобразования. Общим свойством всех интегральных преобразований является их линейность:

$$\mathcal{F}(\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)) = \alpha_1\mathcal{F}(f_1(x)) + \alpha_2\mathcal{F}(f_2(x)).$$

Интегральные преобразования применяются для решения различных задач для уравнений в частных производных и во многих случаях позволяют значительно упростить задачу и даже получить явные решения. Существует множество книг - таблиц различных интегральных преобразований наиболее часто встречающихся функций, используя которые можно решать те или иные задачи математической физики.

Рассмотрим основные часто применяемые интегральные преобразования.

1.1. Экспоненциальное преобразование Фурье

Экспоненциальное преобразование Фурье имеет вид:

$$\mathcal{F}(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-isx} dx = F(s), \tag{1.1}$$

т. е. ядром интегрального преобразования в данном случае является функция

$$K(s, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-isx},$$

а интервал интегрирования и соответственно область определения функции $f(x)$ совпадают со всей осью R^1: $a = -\infty$, $b = +\infty$. Очевидно, что интегральное преобразование (1.1) может быть применимо не ко всем функциям. Например, оно неприменимо к функциям

$$f(x) = const, \quad f(x) = \sin x,$$

поскольку в данном случае интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-isx} dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(sx) dx + i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(sx) dx$$

расходятся. Преобразование Фурье применимо к функциям $f(x)$, которые достаточно быстро стремятся к нулю при $|x| \to \infty$, например, к функциям

$$f(x) = \frac{1}{A^2 + x^2}, \quad f(x) = e^{-x^2}.$$

Узость класса рассматриваемых функций является основным недостатком преобразования Фурье.

Будем в дальнейшем рассматривать такие функции $f(x)$, которые абсолютно интегрируемы вместе со всеми производными, т. е. для которых существует образы Фурье не только самой функции, но и любых ее производных.

Обратное преобразование Фурье $\mathcal{F}^{-1}(F(s))$, восстанавливающее функцию $f(x)$ по ее образу $F(s)$, задается формулой

$$\mathcal{F}^{-1}(F(s)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(s) e^{isx} ds = f(x).$$

(В теории интегральных преобразований доказывается, что для абсолютно интегрируемых функций $f(x)$ интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(s)e^{isx}ds$ сходится, так что обратное преобразование $\mathcal{F}^{-1}(F(s))$ определено.)

Свойства экспоненциального преобразования Фурье

1. Преобразование производных.

Интегрируя по частям, получаем:

$$\mathcal{F}(f'(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-isx}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[(f(x)e^{-isx})|_{x=+\infty} - (f(x)e^{-isx})|_{x=-\infty} +$$

$$+is \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-isx}dx] = isF(s).$$

Здесь используется тот факт, что функция $f(x)$ стремится к нулю при $x \to \pm\infty$, а $|e^{-isx}|$ ограничен (он просто равен единице), поэтому внеинтегральные члены в полученном соотношении "исчезают"и оно принимает вид

$$\mathcal{F}(f'(x)) = isF(s).$$

Аналогично для второй производной $f''(x))$ получим соотношение

$$\mathcal{F}(f''(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f''(x)e^{-isx}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[(f'(x)e^{-isx})|_{x=+\infty} - (f'(x)e^{-isx})|_{x=-\infty} + is \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-isx}dx] =$$

$$= is\mathcal{F}(f'(x)) = (is)^2F(s). = -s^2F(s).$$

Здесь так же, как и при выводе предыдущего соотношения, используется тот факт, что производная $f'(x)$ стремится к нулю при $x \to \pm\infty$, поэтому внеинтегральные члены "исчезают".

По индукции нетрудно доказать, что для производной k-го порядка справедливо соотношение

$$\mathcal{F}(f^{(k)}(x)) = (is)^k F(s). \tag{1.2}$$

Пусть теперь функция f зависит не только от переменной x, но еще и от некоторого параметра t, т. е., $f = f(x,t)$, и по-прежнему преобразование Фурье производится по переменной x, которую будем называть переменной преобразования. Тогда изображение F будет зависеть еще и от параметра t:

$$\mathcal{F}(f(x,t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,t) e^{-isx} dx = F(s,t),$$

и формула (1.2) запишется в виде

$$\mathcal{F}(f_x^{(k)}(x,t)) = (is)^k F(s,t). \tag{1.3}$$

Найдем теперь образ Фурье производной функции $f(x,t)$ по параметру t, т. е.

$$\mathcal{F}(f_t(x,t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_t(x) e^{-isx} dx.$$

Для рассматриваемого класса функций $f(x,t)$ справедлива перестановка порядка интегрирования и дифференцирования интеграла по параметру, т. е.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_t(x,t) e^{-isx} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,t) e^{-isx} dx$$

и, следовательно,

$$\mathcal{F}(f_t(x,t)) = F_t(s,t), \;\; \mathcal{F}(f_{tt}(x,t)) = F_{tt}(s,t). \tag{1.4}$$

Таким образом, правила преобразования Фурье частных производных функции двух переменных $f(x,t)$ могут быть сформулированы следующим образом.

Пусть x — переменная, по которой производится преобразование Фурье (т. е. производится интегрирование). Для того чтобы найти образ Фурье производной функции $f(x,t)$ по этой переменной, нужно, согласно формулам (1.3), умножить образ $F(s,t)$ функции $f(x,t)$ на соответствующую степень is. Для того чтобы найти образ Фурье производной функции $f(x,t)$ по второй переменной t (не являющейся переменной преобразования), нужно, согласно формулам (1.4), продифференцировать соответствующее число раз по переменной t образ $F(s,t)$ функции $f(x,t)$.

2. Свойство свертки. Каждое интегральное преобразование обладает так называемым свойством **свертки**. Дело в том, что Фурье-образ произведения двух функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, вообще говоря, не равен произведению Фурье-образов $\mathcal{F}(f_1(x))$, $\mathcal{F}(f_2(x))$ этих функций т. е.

$$\mathcal{F}(f_1(x)f_2(x)) \neq \mathcal{F}(f_1(x))\mathcal{F}(f_2(x)).$$

Однако, в теории интегральных преобразований есть операция, называемая **сверткой** функций f_1, f_2 и обозначаемая символом $f_1 * f_2$, которая в некотором смысле играет роль произведения при интегральном преобразовании, а именно, справедливо соотношение

$$\mathcal{F}(f_1 * f_2) = \mathcal{F}(f_1)\mathcal{F}(f_2)) = F_1(s)F_2(s), \tag{1.5}$$

или что то же самое

$$\mathcal{F}^{-1}(F_1F_2) = f_1 * f_2. \tag{1.6}$$

Соотношение (1.5) означает, что образом Фурье свертки двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ является произведение образов Фурье $F_1(s)$ и $F_2(s)$ этих функций. Соотношение (1.6) означает, что прообразом произведения образов Фурье $F_1(s)$ и $F_2(s)$ некоторых функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ является их свертка.

Для преобразования Фурье операция свертки определяется формулой

$$\begin{aligned} f_1(x) * f_2(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-\xi) f_2(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) d\xi, \end{aligned} \tag{1.7}$$

и свертка называется бесконечной.

Важность свойства свертки заключается в следующем. При решении задач вместо искомой функции f ищется ее образ Фурье по той или иной переменной, что, как будет видно из дальнейшего изложения, приводит к упрощению задачи. После того как образ Фурье $F(s)$ искомой функции найден, встает задача о восстановлении искомой функции, т. е. нахождении обратного преобразования. Пусть получившаяся функция $F(s)$

является произведением двух функций: $F(s) = F_1(s)F_2(s)$, причем прообразы функций $F_1(s)$ и $F_2(s)$ известны, например, из таблиц интегральных преобразований: $\mathcal{F}^{-1}(F_1(s)) = f_1(x)$, $\mathcal{F}^{-1}(F_2(s)) = f_2(x)$. Тогда необходимость в непосредственном обращении интегрального преобразования, т. е. в нетривиальном вычислении интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(s)e^{isx}dx$ отпадает, поскольку согласно свойству свертки (см. (1.6))

$$f(x) = f_1(x) * f_2(x).$$

Задача 1.1. — задача Коши для уравнения теплопроводности

Применим экспоненциальное преобразование Фурье для решения задачи Коши о распространении тепла в бесконечном стержне. Пусть $u(x,t)$ — температура в точке с координатой x в момент времени t. Функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty,\ t > 0 \tag{1.8}$$

и начальному условию

$$u(x,0) = \phi(x), \quad -\infty < x < +\infty. \tag{1.9}$$

Процедуру нахождения решения задачи (1.8), (1.9) с помощью интегрального преобразования условно можно разбить на три основных шага.

Шаг 1 — преобразование задачи. Заменим задачу (1.8), (1.9) о нахождении функции $u(x,t)$ задачей о нахождении ее образа Фурье $U(s,t)$ при преобразовании по пространственной переменной x

$$\mathcal{F}(u(x,t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)e^{-isx}dx = U(s,t).$$

Для того чтобы получить задачу для функции $U(s,t)$, подвергнем уравнение и начальные условия для искомой функции $u(x,t)$ преобразованию Фурье по переменной x. Получим

$$\mathcal{F}(u_t) = a^2\mathcal{F}(u_{xx}),$$

$$\mathcal{F}(u(x,0)) = U(s,0) = \mathcal{F}(\phi(x)) = \Phi(s).$$

(Через $\Phi(s)$ мы обозначили образ начальной функции $\phi(x)$)).

Воспользовавшись формулами (1.3), (1.4) для преобразования Фурье производных и выписанным выше выражением для $U(s,0)$, получим задачу для "новой"функции $U(s,t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}U(s,t) = -a^2s^2U(s,t), \quad t > 0;$$

$$U(s,0) = \Phi(s).$$

Дифференциальное уравнение для функции $U(s,t)$ на самом деле является обыкновенным дифференциальным уравнением по переменной t для функции $U(s,t)$, зависящей от параметра s, т. е. задача для функции $U(s,t)$ может быть записана и в виде

$$\frac{dU}{dt} = -a^2s^2U, \quad t > 0. \tag{1.10}$$

$$U|_{t=0} = \Phi(s). \qquad (1.11).$$

Таким образом, задача для образа Фурье $U(s,t)$ искомой функции $u(x,t)$ существенно проще, чем задача для самой функции $u(x,t)$: вместо исходного уравнения (1.8) в частных производных, у которого нет простого явного решения, мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение (1.10), которое легко решается.

Шаг 2 — решение преобразованной задачи. Уравнение (1.10) — это линейное однородное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение легко находится, например, методом разделения переменных:

$$\frac{dU}{U} = -a^2s^2dt; \;\; \ln|U| = -a^2s^2t + \ln|C|, \;\; U(s,t) = Ce^{-a^2s^2t}.$$

Используя начальное условие (1.11), получаем

$$U(s,t) = \Phi(s)e^{-a^2s^2t}.$$

Шаг 3 — нахождение обратного преобразования. Для завершения решения задачи нужно от образа $U(s,t)$ вернуться к искомому решению $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}(U(s,t)) = \mathcal{F}^{-1}(\Phi(s)e^{-a^2s^2t}).$$

Здесь есть два пути. Либо непосредственно считать соответствующие интегралы, либо, что значительно проще, воспользоваться таблицами и свойством свертки. Действительно, мы видим, что функция $U(s,t)$ может быть записана в виде произведения двух сомножителей

$$U(s,t) = U_1(s,t)U_2(s,t),$$

где $U_1(s,t) = \Phi(s)$, $U_2(s,t) = e^{-a^2s^2t}$.

Для того чтобы воспользоваться свойством свертки, нужно знать обратные преобразования (прообразы) каждого из сомножителей. Что касается первого из сомножителей, т. е. функции $U_1(s,t)$, то мы знаем, что (прообразом) обратным преобразованием функции $\Phi(s)$ является функция $\phi(x)$: $\mathcal{F}^{-1}(U_1(s,t)) = \mathcal{F}^{-1}(\Phi(s)) = \phi(x)$. Что касается второго сомножителя $U_2(s,t) = e^{-a^2s^2t}$, то его обратное преобразование (прообраз) найдем в таблице. Оказывается, что

$$\mathcal{F}^{-1}(U_2(s,t)) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-a^2s^2t}) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$$

Применяя свойство свертки (см. (1.6)), получим

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}(\Phi(s)e^{-a^2s^2t}) = \mathcal{F}^{-1}(\Phi(s)) * \mathcal{F}^{-1}(e^{-a^2s^2t}) =$$
$$= \phi(x) * [\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}] = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\phi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi. \tag{1.12}$$

Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности получено.

Замечание. Поскольку для решения задачи применялось преобразование Фурье, а оно, как было отмечено выше, может быть применимо лишь для функций, которые достаточно быстро убывают при $x \to \pm\infty$, то данное решение получено в предположении, что начальная функция $\phi(x)$ и сама функция $u(x,t)$ достаточно быстро убывают при $x \to \pm\infty$.

Однако можно доказать (но это выходит за рамки нашего изложения), что полученная формула справедлива для более широкого круга задач. На самом деле и для начальных функций $\phi(x)$, растущих при $x \to \pm\infty$, например, степенным образом, решение задачи Коши также дается формулой (1.12).

Задача 1.2. — задача Коши для гиперболического уравнения. Формула Даламбера

Применим экспоненциальное преобразование Фурье для решения задачи Коши для неограниченной струны. Пусть функция $u(x,t)$ является решением гиперболического уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty,\ t > 0 \tag{1.13}$$

и удовлетворяет начальным условиям

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \phi(x), \quad -\infty < x < +\infty, \\ u_t(x,0) &= \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Шаг 1 — преобразование задачи. Заменим задачу (1.13), (1.14) о нахождении функции $u(x,t)$ задачей о нахождении ее образа Фурье $U(s,t)$ при преобразовании по пространственной переменной x

$$\mathcal{F}(u(x,t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-isx} dx = U(s,t).$$

Для того чтобы получить задачу для функции $U(s,t)$, подвергнем уравнение и начальные условия для искомой функции $u(x,t)$ преобразованию Фурье по переменной x. Получим

$$\mathcal{F}(u_{tt}) = a^2 \mathcal{F}(u_{xx}),$$

$$\mathcal{F}(u(x,0)) = U(s,0) = \mathcal{F}(\phi(x)) = \Phi(s),$$

$$\mathcal{F}(u_t(x,0)) = U_t(s,0) = \mathcal{F}(\psi(x)) = \Psi(s).$$

(Через $\Phi(s)$, $\Psi(s)$ мы обозначили образы начального отклонения $\phi(x)$) и начальной скорости $\psi(x)$ соответственно.)

Воспользовавшись формулами (1.3), (1.4) для преобразования Фурье производных, получим задачу для "новой"функции $U(s,t)$:

$$\tfrac{\partial^2}{\partial t^2} U(s,t) = -a^2 s^2 U(s,t), \quad t > 0;$$

$$U(s,0) = \Phi(s), \quad U_t(s,0) = \Psi(s).$$

Шаг 2 — решение преобразованной задачи.

Дифференциальное уравнение для функции $U(s,t)$ — это обыкновенное дифференциальное уравнение по переменной t для функции $U(s,t)$, зависящей от параметра s, т. е. задача для функции $U(s,t)$ может быть записана в виде

$$\frac{d^2U}{dt^2} + a^2s^2U = 0, \quad t > 0. \tag{1.15}$$

$$U|_{t=0} = \Phi(s), \;\; U_t|_{t=0} = \Psi(s). \tag{1.16}$$

Уравнение (1.15) — это линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами, корнями характеристического уравнения $\beta^2 + a^2s^2 = 0$ являются $\beta_1 = ias$, $\beta_2 = -ias$, и, следовательно, общее решение уравнения (1.15) имеет вид:

$$U(s,t) = C_1(s)e^{iast} + C_2(s)e^{-iast}.$$

Выберем $C_1(s)$, $C_2(s)$ таким образом, чтобы были выполнены начальные условия:

$$C_1 + C_2 = \Phi(s),$$

$$iasC_1 - iasC_2 = \Psi(s).$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$C_1 = \tfrac{\Phi(s)}{2} + \tfrac{1}{2ias}\Psi(s),$$

$$C_2 = \tfrac{\Phi(4)}{2} - \tfrac{1}{2ias}\Psi(s),$$

и, следовательно, решение задачи (1.15), (1.16) имеет вид:

$$U(s,t) = \frac{\Phi(s)}{2}e^{iast} + \frac{\Phi(s)}{2}e^{-iast} - \frac{1}{2ias}[e^{-ast} - e^{iast}]\Psi(s).$$

Шаг 3 — нахождение обратного преобразования. Для завершения решения задачи нужно от образа $U(s,t)$ вернуться к искомому решению $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}(U(s,t)).$$

Обозначим

$$U_1(s,t) = \frac{\Phi(s)}{2}e^{iast}, \;\; U_2(s,t) = \frac{\Phi(s)}{2}e^{-iast},$$

$$U_3(s,t) = -\frac{1}{2ias}[e^{-ast} - e^{iast}]\Psi(s),$$

так что $U(s,t) = U_1(s,t) + U_2(s,t) + U_3(s,t)$.

Заметим далее, что по определению

$$\mathcal{F}(f(x-\omega)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{isx} f(x-\omega)dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{is(x+\omega)} f(x)dx = e^{is\omega}F(s),$$

или, что то же самое,

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{is\omega}F(s)) = f(x-\omega).$$

Используя это соотношение, выпишем обратные преобразования от функций $U_1(s,t)$, $U_2(s,t)$:

$$\mathcal{F}^{-1}(U_1(s,t)) = \frac{1}{2}\phi(x-at), \quad \mathcal{F}^{-1}(U_2(s,t)) = \frac{1}{2}\phi(x+at).$$

Найдем обратное преобразование от слагаемого $U_3(s,t)$

$$\mathcal{F}^{-1}(U_3(s,t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-isx} \left[\frac{-1}{2ias}(e^{-iast} - e^{iast})\Psi(s)\right] ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Psi(s) \frac{-1}{2ias} \left(e^{-is(x+at)} - e^{-is(x-at)}\right) ds.$$

Нетрудно проверить, что

$$\int\limits_{x-at}^{x+at} e^{-isy}dy = \frac{-1}{is}[e^{-is(x+at)} - e^{-is(x-at)}],$$

и, следовательно, полученная выше формула может быть переписана в виде

$$\mathcal{F}^{-1}(U_3(s,t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Psi(s) \left[\frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} e^{-isy}dy\right] ds.$$

Поменяв порядок интегрирования, приходим к формуле

$$\mathcal{F}^{-1}(U_3(s,t)) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Psi(s)e^{-isy}ds\right]dy =$$

$$= \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(y)dy.$$

Итак, $u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}(U_1(s,t)) + \mathcal{F}^{-1}(U_2(s,t) + \mathcal{F}^{-1}(U_3(s,t))$ и учитывая полученные выше формулы для каждого из слагаемых, приходим к окончательной формуле для решения задачи (1.13), (1.14):

$$u(x,t) = \frac{\phi(x-at)+\phi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(y)dy. \qquad (1.17)$$

Эта формула называется **формулой Даламбера**.

Замечание. Так же, как и выше при решении задачи Коши для уравнения теплопроводности, формула (1.17) получена для функций, для которых применимо преобразование Фурье, например, для быстро убывающих вместе с производными функций. Но можно построить это решение и другим способом (см., например, [2]), для которого это ограничение не требуется, и решение по-прежнему записывается в виде формулы Даламбера.

1.2. Синус и косинус-преобразования Фурье

Синус-преобразование Фурье имеет вид:

$$\mathcal{F}_s(f(x)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} f(x)\sin(\xi x)dx = F_s(\xi),$$

т. е. ядром интегрального преобразования в данном случае является функция

$$K(\xi,x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(\xi x),$$

а интервал интегрирования и соответственно область определения функции $f(x)$ совпадают с полуосью $x > 0$. Обратное преобразование имеет вид:

$$\mathcal{F}_s^{-1}(F_s(\xi)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty F_s(\xi)\sin(\xi x)d\xi = f(x).$$

Косинус-преобразование Фурье имеет вид:

$$\mathcal{F}_c(f(x)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty f(x)\cos(\xi x)dx = F_c(\xi),$$

т. е. ядром интегрального преобразования в данном случае является функция

$$K(\xi, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(\xi x),$$

а интервал интегрирования и соответственно область определения функции $f(x)$ совпадают с полуосью $x > 0$. Обратное преобразование имеет вид

$$\mathcal{F}_c^{-1}(F_c(\xi)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty F_c(\xi)\cos(\xi x)d\xi = f(x).$$

Так же, как и экспоненциальное преобразование, синус и косинус-преобразования применимы к функциям $f(x)$, для которых сходятся соответствующие несобственные интегралы, в частности, к функциям, которые быстро убывают при $x \to +\infty$ вместе с производными.

Синус и косинус-преобразования производных

Так же, как и в случае экспоненциального преобразования, непосредственным интегрированием по частям нетрудно получить формулы для синус и косинус-преобразования производных:

$$\mathcal{F}_s(f'(x)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty f'(x)\sin(\xi x)dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}[(f(x)\sin(\xi x))|_{x=+\infty} - (f(x)\sin(\xi x))|_{x=0}] -$$

$$-\xi\int\limits_0^\infty f(x)\cos(\xi x)dx] = -\xi\mathcal{F}_c(f(x)),$$

$$\mathcal{F}_c(f'(x)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty f'(x)\cos(\xi x)dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}[(f(x)\cos(\xi x))|_{x=+\infty} - (f(x)\cos(\xi x))|_{x=0}] + \xi \int\limits_0^\infty f(x)\sin(\xi x)dx] =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0) + \xi \mathcal{F}_s(f(x)),$$

$$\mathcal{F}_s(f''(x)) = -\xi \mathcal{F}_c(f'(x)) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\xi f(0) - \xi^2 \mathcal{F}_s(f(x)),$$

$$\mathcal{F}_c(f''(x)) = -\sqrt{\tfrac{2}{\pi}} f'(0) + \xi \mathcal{F}_s(f'(x)) = -\sqrt{\tfrac{2}{\pi}} f'(0) - \xi^2 \mathcal{F}_c(f(x)).$$

Запишем полученные формулы в более компактном виде:

$$\begin{gathered} \mathcal{F}_s(f') = -\xi \mathcal{F}_c(f), \\ \mathcal{F}_s(f'') = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\xi f(0) - \xi^2 \mathcal{F}_s(f), \\ \mathcal{F}_c(f') = -\sqrt{\tfrac{2}{\pi}} f(0) + \xi \mathcal{F}_s(f), \\ \mathcal{F}_c(f'') = -\sqrt{\tfrac{2}{\pi}} f'(0) - \xi^2 \mathcal{F}_c(f). \end{gathered} \tag{1.18}$$

Замечание. Отметим, что при синус-преобразовании образ второй производной $\mathcal{F}_s(f'')$ выражается через образ $\mathcal{F}_s(f)$ самой функции и значение этой функции в нуле, т. е. $f(0)$, а при косинус-преобразовании — через образ $\mathcal{F}_c(f)$ самой функции и значение производной этой функции в нуле, т. е. $f'(0)$.

Пусть теперь функция f зависит не только от переменной x, но еще и от некоторого параметра t, т. е. $f = f(x,t)$, и по-прежнему преобразования производятся по переменной x, которую будем называть переменной преобразования или основной переменной. Тогда изображения F_s и F_c будут зависеть еще и от параметра t, т. е. $F_s = F_s(\xi, t)$, $F_c = F_c(\xi, t)$, и формулы (1.18) должны быть записаны в виде:

$$\begin{gathered}
\mathcal{F}_s(f_x) = -\xi \mathcal{F}_c(f) = -\xi F_c(\xi, t); \\
\mathcal{F}_s(f_{xx}) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \xi f(0,t) - \xi^2 \mathcal{F}_s(f) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \xi f(0,t) - \xi^2 F_s(\xi, t); \\
\mathcal{F}_c(f_x) = -\sqrt{\tfrac{2}{\pi}} f(0,t) + \xi \mathcal{F}_s(f) = -\sqrt{\tfrac{2}{\pi}} f(0,t) + \xi F_s(\xi, t) \\
\mathcal{F}_c(f_{xx}) = -\sqrt{\tfrac{2}{\pi}} f_x(0,t) - \xi^2 \mathcal{F}_c(f) = -\sqrt{\tfrac{2}{\pi}} f_x(0,t) - \xi^2 F_c(\xi, t).
\end{gathered} \tag{1.19}$$

Найдем теперь образы производных функции $f(x,t)$ по параметру t, т. е. $\mathcal{F}(\frac{\partial^k f(x,t)}{\partial t^k})$. Для рассматриваемого класса функций $f(x,t)$ справедлива перестановка порядка интегрирования и дифференцирования, т. е.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial^k f(x,t)}{\partial t^k} \sin(\xi x) dx = \frac{\partial^k}{\partial t^k} \int\limits_0^{+\infty} f(x,t) \sin(\xi x) dx,$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial^k f(x,t)}{\partial t^k} \cos(\xi x) dx = \frac{\partial^k}{\partial t^k} \int\limits_0^{+\infty} f(x,t) \cos(\xi x) dx,$$

и, следовательно,

$$\begin{gathered}
\mathcal{F}_s(\tfrac{\partial^k f(x,t)}{\partial t^k}) = \tfrac{\partial^k \mathcal{F}_s(f)}{\partial t^k} = \tfrac{\partial^k F_s(\xi,t)}{\partial t^k}); \\
\mathcal{F}_c(\tfrac{\partial^k f(x,t)}{\partial t^k} = \tfrac{\partial^k \mathcal{F}_c(f)}{\partial t^k} = \tfrac{\partial^k F_c(\xi,t)}{\partial t^k}.
\end{gathered} \tag{1.20}$$

Следующее свойство, которое мы рассматривали для экспоненциального преобразования Фурье, — это свойство свертки, позволяющее относительно просто находить обратное преобразование (прообраз) произведения двух сомножителей, если известны обратные преобразования (прообразы) каждого из сомножителей в отдельности. Для синус и косинус-преобразований также существует правило свертки, но сама свертка определяется более сложным образом и в данном изложении не приводится. Соответствующие формулы можно найти в различных справочниках и таблицах интегральных преобразований.

Применение синус и косинус-преобразований для решения задач на полупрямой

Задачи, которые мы хотим рассмотреть, формулируются следующим образом.

Задача 1.3. Найти функцию $u(x,t)$ — решение смешанной задачи:

$$\begin{gathered} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \infty,\ t > 0; \\ u(x,0) = 0, \quad 0 < x < \infty; \\ u(0,t) = \mu(t), \quad 0 < t < \infty. \end{gathered} \tag{1.21}$$

Задача 1.4. Найти функцию $u(x,t)$ — решение смешанной задачи:

$$\begin{gathered} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \infty,\ t > 0; \\ u(x,0) = 0, \quad 0 < x < \infty; \\ \tfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = g(t), \quad 0 < t < \infty. \end{gathered} \tag{1.22}$$

Будем решать эти задачи с помощью либо синус-преобразования, либо косинус-преобразования. Выясним, какое из этих преобразований разумно применять к первой задаче, а какое – ко второй задаче. Как мы видели при решении предыдущего примера, интегральное преобразование применяется к исходному уравнению для того, чтобы исключить производную по переменной преобразования. Как уже было отмечено выше, $\mathcal{F}_s(u_{xx})$ выражается через $\mathcal{F}_s(u)$ и значение функции $u(x,t)$ при $x = 0$, а $\mathcal{F}_c(u_{xx})$ выражается через $\mathcal{F}_c(u)$ и значение производной $u_x(x,t)$ при $x = 0$. В первой из задач нам известно значение функции $u(x,t)$ при $x = 0$, в то время как во второй задаче известно значение производной $u_x(x,t)$ при $x = 0$. Следовательно, для решения первой задачи нужно применить синус-преобразование, а для решения второй — косинус-преобразование.

Дальнейшая схема решения стандартна для всех интегральных преобразований и была уже реализована в рассмотренном примере для решения задачи Коши. Решение каждой из предложенных задач разбивается на три основных шага: переход к задаче для образа, решение этой новой, более простой, чем исходная, задачи, и нахождение обратного преобразования, т. е. искомой функции.

Рассмотрим решение задачи 1.3. Как уже было сказано выше, для решения задачи 1.3 будем применять синус - преобразование по пространственной переменной x.

Шаг 1 — преобразование задачи. Заменим исходную задачу о нахождении функции $u(x,t)$ задачей о нахождении ее образа $U(\xi,t)$

$$\mathcal{F}_s(u(x,t)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} u(x,t)\sin(\xi x)dx = U(\xi,t).$$

Для того чтобы получить задачу для функции $U(\xi,t)$, подвергнем уравнение и начальные условия (1.21) для искомой функции $u(x,t)$ синус-преобразованию по x.

$$\mathcal{F}_s(u_t) = a^2\mathcal{F}_s(u_{xx}),$$

$$\mathcal{F}_s(u(x,0)) = 0.$$

Последнее соотношение следует из того, что по условию задачи начальная функция равна нулю, т. е. $u(x,0) = 0$.

Используя полученные выше правила (1.19), (1.20) преобразования производных, а также условие $u(0,t) = \mu(t)$, получим задачу для образа $U(\xi,t)$:

$$\tfrac{\partial U(\xi,t)}{\partial t} = a^2\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\xi\mu(t) - \xi^2 U(\xi,t), \quad t > 0;$$

$$U(\xi,0) = 0.$$

Получившееся дифференциальное уравнение для "новой"функции $U(\xi,t)$ является обыкновенным дифференциальным уравнением по переменной t для функции $U(\xi,t)$, зависящей от параметра ξ, т. е. задача для функции $U(\xi,t)$ может быть записана в виде

$$\frac{dU}{dt} + a^2\xi^2 U = \sqrt{\frac{2}{\pi}}a^2\xi\mu(t), \quad t > 0; \quad U|_{t=0} = 0. \tag{1.23}$$

Задача (1.23) для образа $U(\xi,t)$ искомой функции $u(x,t)$ существенно проще, чем задача (1.21) для самой функции $u(x,t)$: вместо исходного уравнения в частных производных мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение.

Шаг 2 — решение преобразованной задачи. Решение преобразованной задачи в данном случае легко находится, поскольку получившееся уравнение — это неоднородное линейное уравнение первого порядка, его решение легко найти стандартными способами. Например, будем искать решение U в виде произведения двух функций $U = ZW$. Подставляя предполагаемое решение в уравнение, получим

$$\frac{dZ}{dt}W + Z\frac{dW}{dt} + a^2\xi^2 ZW = \left[\frac{dZ}{dt} + a^2\xi^2 Z\right]W + Z\frac{dW}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}a^2\xi\mu(t).$$

В качестве функции $Z(\xi, t)$ возьмем функцию, обращающую в нуль квадратную скобку в выписанном выше уравнении, т. е. какое-нибудь решение уравнения

$$\frac{dZ}{dt} + a^2\xi^2 Z = 0,$$

например,

$$Z(\xi, t) = e^{-a^2\xi^2 t}.$$

Тогда для определения функции $W(\xi, t)$ получим уравнение

$$Z\frac{dW}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}a^2\xi\mu(t),$$

или, что то же самое,

$$\frac{dW}{dt} = e^{a^2\xi^2 t}\sqrt{\frac{2}{\pi}}a^2\xi\mu(t).$$

Интегрируя это соотношение, получаем

$$W(\xi, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}a^2\xi\int\limits_0^t \mu(\tau)e^{a^2\xi^2\tau}d\tau + C,$$

и, следовательно, общее решение уравнения (1.23) имеет вид:

$$U(\xi, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}a^2\xi\int\limits_0^t \mu(\tau)e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}d\tau + Ce^{-a^2\xi^2 t}.$$

Из начальных условий задачи (1.23) следует, что $C = 0$, и окончательно

$$U(\xi, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} a^2 \xi \int\limits_0^t \mu(\tau) e^{-a^2\xi^2(t-\tau)} d\tau. \tag{1.24}$$

Шаг 3 — нахождение обратного преобразования. Для завершения решения задачи нужно от образа $U(\xi, t)$ вернуться к искомому решению $u(x, t)$:

$$u(x,t) = \mathcal{F}_s^{-1}(U(\xi,t)) = \frac{2}{\pi} a^2 \int\limits_0^\infty \xi \left[\int\limits_0^t \mu(\tau) e^{-a^2\xi^2(t-\tau)} d\tau \right] \sin(\xi x) d\xi =$$

$$= \frac{2}{\pi} a^2 \int\limits_0^t \mu(\tau) \left[\int\limits_0^\infty \xi e^{-a^2\xi^2(t-\tau)} \sin(\xi x) d\xi \right] d\tau.$$

Для вычисления "внутреннего"интеграла воспользуемся табличным интегралом (см. [5], стр. 73, формула (19))

$$I(\omega, x) = \int\limits_0^\infty \xi e^{-\omega^2\xi^2} \sin(\xi x) d\xi = \frac{x\sqrt{\pi}}{4\omega^3} e^{-\frac{x^2}{4\omega^2}}.$$

В нашем случае следует положить $\omega = a\sqrt{t-\tau}$, и тогда функция $u(x, t)$ может быть записана в виде

$$u(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}a} \int\limits_0^t \mu(\tau) \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau. \tag{1.25}$$

Для случая, когда граничная функция постоянна: $\mu(t) = A$, эта формула принимает простой вид. Перейдя в полученном интеграле от переменной τ к новой переменной $z = \frac{x}{2a\sqrt{(t-\tau)}}$, получим

$$u(x,t) = \frac{2A}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^\infty e^{-z^2} dz = \frac{2A}{\sqrt{\pi}} Erfc(\frac{x}{2a\sqrt{t}}).$$

Здесь использовано обозначение

$$Erfc(\tau) = \int\limits_\tau^\infty e^{-z^2} dz.$$

Совершенно аналогично, с применением косинус-преобразования решается задача 1.2. Ограничимся кратким изложением решения этой задачи. Итак, делаем косинус-преобразование по переменной x, т. е. от функции $u(x,t)$ переходим к ее образу $U(\xi,t) = \mathcal{F}_c(u(x,t))$. Используя формулы (1.19), (1.20) для косинус-преобразования производных функции $u(x,t)$, от задачи (1.22) перейдем к задаче для функции $U(\xi,t)$:

$$\frac{dU}{dt} + a^2\xi^2 U = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}a^2 g(t), \quad t > 0; U|_{t=0} = 0.$$

Эта задача совершенно аналогична рассмотренной выше задаче (1.23) и ее решение может быть записано в виде формулы, аналогичной (1.24):

$$U(\xi,t) = -a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^t g(\tau)e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}d\tau.$$

Решение $u(x,t)$ исходной задачи получается в результате обратного косинус-преобразования

$$u(x,t) = \mathcal{F}_c^{-1}(U(\xi,t)) = -\frac{2}{\pi}a^2\int\limits_0^\infty [\int\limits_0^t g(\tau)e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}d\tau]\cos(\xi x)d\xi =$$

$$= -\frac{2}{\pi}a^2\int\limits_0^t g(\tau)[\int\limits_0^\infty e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}\cos(\xi x)d\xi]d\tau.$$

Для вычисления "внутреннего"интеграла воспользуемся табличным интегралом (см. [4], стр.24, формула (11))

$$I(\omega,x) = \int\limits_0^\infty e^{-\omega^2\xi^2}\cos(\xi x)d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\omega^{-1}e^{-\frac{x^2}{4\omega^2}}.$$

Полагая $\omega = a\sqrt{t-\tau}$, запишем функцию $u(x,t)$ в виде

$$u(x,t) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}a}\int\limits_0^t g(\tau)\frac{1}{a\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau. \tag{1.26}$$

Отметим еще раз, что для всех трех преобразований Фурье (экспоненциального, синус-преобразования, косинус-преобразования) главным недостатком является узость класса функций, к которым можно их применять, например, все эти преобразования неприменимы для знакоопределенных функций, не убывающих при $x \to \pm\infty$.

1.3. Преобразование Лапласа

Пусть дано множество функций $f(t)$, определенных на полупрямой $t \geq 0$ и при $t \to +\infty$ удовлетворяющих условию $f(t) = O(e^{\sigma_0 t})$, где σ_0 — некоторое положительное число. Тогда преобразование Лапласа функции $f(t)$, определяемое формулой

$$F(p) = \mathcal{L}(f(t)) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt, \quad p = \sigma + i\tau,$$

будет аналитической функцией комплексной переменной p при $\sigma > \sigma_0$.

Обратное преобразование Лапласа имеет вид

$$\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i_\infty}^{c+i\infty} F(p)e^{pt}dp,$$

где интегрирование проводится вдоль произвольной вертикальной прямой $Re\ p = c$, $c > \sigma_0$ в комплексной плоскости C.

Важным преимуществом преобразования Лапласа перед преобразованиями Фурье является то, что оно применимо к гораздо более широкому классу функций, чем преобразования Фурье, в частности, ко всем функциям, растущим на бесконечности степенным образом. Чаще всего преобразование Лапласа используется при решении параболических уравнений, и переменная t играет роль времени.

Преобразование Лапласа, его свойства и способы вычисления обратных преобразований достаточно подробно изучались в теории функций комплексного переменного, поэтому ограничимся перечислением его основных свойств.

1. Преобразование частных производных

Пусть $u(x,t)$ — функция двух переменных x и t, и мы хотим найти результаты применения преобразования Лапласа к различным частным производным. Обозначим $\mathcal{L}(u(x,t))) = U(x,p)$.

Преобразование Лапласа частных производных по переменной t (t — переменная интегрирования в преобразовании) проводится по формулам:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u_t) &= \int_0^\infty u_t(x,t)e^{-pt}dt = pU(x,p) - u(x,0), \\ \mathcal{L}(u_{tt}) &= \int_0^\infty u_{tt}(x,t)e^{-pt}dt = p^2U(x,p) - pu(x,0) - u_t(x,0). \end{aligned} \tag{1.27}$$

Эти формулы легко получаются путем интегрирования по частям.

Преобразование Лапласа частных производных по переменной x, играющей роль параметра, проводится по правилам

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u_x) &= \tfrac{\partial U(x,p)}{\partial x}, \\ \mathcal{L}(u_{xx}) &= \tfrac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2}. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Правила преобразования этих производных вытекают из теоремы о дифференцировании интеграла по параметру.

2. Свойство свертки

Понятие свертки в преобразовании Лапласа играет ту же роль, что и в экспоненциальном преобразовании Фурье. **Конечная свертка** двух функций $f(t)$ и $g(t)$ определяется формулой

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

(Здесь интегрирование ведется по конечному промежутку от 0 до t, а не по бесконечному $(-\infty, +\infty)$, как это было ранее (см. (1.7)) при определении бесконечной свертки.)

Как и в случае преобразования Фурье, важнейшее свойство свертки определяется формулой

$$\mathcal{L}(f * g) = F(p)G(p)$$

или эквивалентной формулой

$$\mathcal{L}^{-1}(FG) = f * g.$$

Здесь обозначено $\mathcal{L}f = F(p)$, $\mathcal{L}g = G(p)$.

Эти формулы позволяют обращать преобразование Лапласа в тех случаях, когда изображение можно представить в виде произведения $F(p)$ и $G(p)$ таких сомножителей, для которых обратные преобразования $\mathcal{L}^{-1}(F) = f(t)$ и $\mathcal{L}^{-1}() = g(t)$ легко находятся. После того как функции $f(t)$ и $g(t)$ найдены, осталось найти их свертку.

Например, нужно найти обратное преобразование для функции $\frac{1}{p(p^2+1)}$. В таблице интегральных преобразований находим, что

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p} = 1,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p^2+1} = \sin t,$$

и тогда согласно теореме о свертке

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p(p^2+1)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}\frac{1}{p^2+1}\right) = 1 * \sin t = \int_0^t \sin\tau d\tau = 1 - \cos t.$$

1.4. Применение преобразования Лапласа к решению некоторых задач

Некоторые из задач, рассмотренных выше (см.(1.8)-(1.9), (1.21)), решим с помощью преобразования Лапласа.

Задача Коши для уравнения теплопроводности — задача 1.1. Найти решение уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty,\ t > 0;$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = \phi(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Эта задача была решена ранее (задача (1.8), (1.9)) с помощью экспоненциального преобразования Фурье и, как уже неоднократно отмечалось, это можно было сделать лишь для начальной функции, для которой преобразование Фурье имеет смысл, т. е. сходится соответствующий несобственный интеграл.

Преобразование Лапласа позволяет находить решение для любой не слишком быстро растущей на бесконечности начальной функции. Решим, например, задачу для случая, когда начальная функция $\phi(x)$ имеет вид $\phi(x) = \sin x$, т. е. преобразование Фурье неприменимо. Заметим, что хотя для данной начальной функции решение задачи может быть найдено и более простым способом, тем не менее мы решим ее с помощью преобразования Лапласа с тем, чтобы проиллюстрировать данный метод.

Итак, пусть

$$u(x,0) = \sin x, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Шаг 1 — преобразование задачи. Заменим исходную задачу о нахождении функции $u(x,t)$ задачей о нахождении ее образа $U(p,t)$ при преобразовании Лапласа по времени, т. е. по переменной t

$$\mathcal{L}(u(x,t)) = \int\limits_0^{+\infty} u(x,t)e^{-pt}dt = U(p,x).$$

Для того чтобы получить задачу для функции $U(p,x)$, подвергнем уравнение для искомой функции $u(x,t)$ преобразованию Лапласа по переменной t. Получим

$$\mathcal{L}(u_t) = a^2\mathcal{L}(u_{xx})$$

Воспользовавшись правилами преобразования (1.27), (1.28) производных и учитывая, что $u(x,0) = \sin x$, получим

$$pU - \sin x = a^2 U_{xx}, \;\; \infty < x < +\infty.$$

Полученное дифференциальное уравнение для "новой"функции $U(p,x)$ на самом деле является обыкновенным дифференциальным уравнением по переменной x для функции $U(p,x)$, зависящей от параметра p, т. е. может быть записано и в виде

$$a^2\frac{d^2U}{dx^2} - pU = -\sin x, \;\; -\infty < x < +\infty. \qquad (1.29)$$

Таким образом, уравнение для $U(,p,x)$ искомой функции $u(x,t)$ существенно проще, чем уравнение для самой функции $u(x,t)$: вместо исходного уравнения в частных производных мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение.

Шаг 2 — решение преобразованной задачи.

Уравнение (1.29) легко решается. Действительно, это линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами, и его общее решение — это сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Характеристическое уравнение $a^2\beta^2 - p = 0$ имеет два корня:

$$\beta_1 = -\frac{\sqrt{p}}{a}, \quad \beta_2 = \frac{\sqrt{p}}{a},$$

так что общее решение однородного уравнения (1.29) — это функция $U^*(p,x) = C_1 e^{\beta_1 x} + C_2 e^{\beta_2 x}$. Частное решение $\tilde{U}(p,x)$ неоднородного уравнения (1.29) легко находится: правая часть уравнения — это функция $f(x) = -\sin x$, и существует частное решение вида $\tilde{U}(p,x) = A_1 \sin x + A_2 \cos x$. Подставив функцию $\tilde{U}(p,x)$ в уравнение (1.29) и приравняв коэффициенты при $\sin x$, $\cos x$, получим $A_2 = 0$, $A_1 = 1/(p+a^2)$, так что общее решение
уравнения (1.29) имеет вид:

$$U(p,x) = C_1 e^{-\frac{\sqrt{p}x}{a}} + C_2 e^{\frac{\sqrt{p}x}{a}} + \frac{1}{p+a^2}\sin x.$$

Заметим, что у нас пока нет никаких граничных условий для функции $U(p,x)$. Но из физических соображений ясно, что решение $u(x,t)$ исходной задачи не должно расти "слишком быстро"при $t \to \infty$: оно должно вести себя так же, как и начальная функция, т.е. в данном случае должно быть ограниченным. Аналогичным поведением при $x \to \pm\infty$ должна обладать и функция $U(p,x)$. Следовательно, общее решение $U(p,x)$ не может содержать слагаемых, экспоненциально растущих на бесконечности ($e^{-px} \to \infty$ при $x \to -\infty$, $e^{px} \to \infty$ при $x \to +\infty$), и необходимо положить $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Итак,

$$U(p,x) = \frac{1}{p+a^2}\sin x.$$

Шаг 3 — нахождение обратного преобразования. Для завершения решения задачи нужно от образа $U(p,x)$ вернуться к искомому решению $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}(U(p,x)) = \mathcal{L}^{-1}(\sin x \frac{1}{p+a^2}) = \sin x \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{p+a^2}).$$

Согласно свойствам преобразования Лапласа обратным преобразованием функции $1/(p-\beta)$ является функция $e^{\beta t}$ (см. прил. 3, формула (1)). В нашем случае $\beta = -a^2$, и, следовательно, искомая функция $u(x,t)$ имеет вид

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}(U(p,x)) = \sin x e^{-a^2 t}.$$

Задача 1.3. Решим с помощью преобразования Лапласа смешанную задачу (1.21) для уравнения теплопроводности на полупрямой, также решенную ранее с помощью синус-преобразования Фурье. Требуется найти функцию $u(x,t)$ — решение задачи:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \infty,\ t > 0;$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 < x < \infty;$$

$$u(0,t) = \mu(t), \quad 0 < t < \infty.$$

Шаг 1 — преобразование задачи.

Для того чтобы получить задачу для функции $U(p,x)$ — образа функции $u(x,t)$, подвергнем уравнение и граничное условие для искомой функции $u(x,t)$ преобразованию Лапласа по переменной t. Получим

$$\mathcal{L}(u_t) = a^2 \mathcal{L}(u_{xx}),\ \ U(p,0) = M(p),$$

где $M(p) = \mathcal{L}(\mu(t))$ — образ граничной функции $\mu(t)$. Воспользовавшись правилами преобразования производных и тем, что $u(x,0) = 0$, получим

$$pU = a^2 \frac{d^2U}{dx^2},\ \ 0 < x < +\infty;\ \ U(p,0) = M(p). \tag{1.30}$$

Шаг 2 — решение преобразованной задачи.

Общее решение уравнения (1.30) было выписано при рассмотрении предыдущей задачи

$$U(p,x) = C_1 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} + C_2 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Из физических соображений ясно, что решение $u(x,t)$ исходной задачи не должно расти "слишком"быстро при $x \to +\infty$, и поэтому экспоненциально растущее слагаемое в функции $U(p,x)$ необходимо исключить, т. е.

следует положить $C_2 = 0$. Учитывая, кроме того, условие $U(p,0) = M(p)$, получаем, что $C_1 = M(p)$ и, следовательно,

$$U(p,x) = M(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Шаг 3 — нахождение обратного преобразования. Для завершения решения задачи нужно от образа $U(p,x)$ вернуться к искомому решению $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}(U(p,x)) = \mathcal{L}^{-1}(M(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}).$$

Для вычисления обратного преобразования воспользуемся таблицами интегральных преобразований и формулой Дюамеля.

Для этого представим функцию $U(p,x)$ в виде

$$U(p,x) = M(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} = pM(p)\frac{e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}}{p}.$$

Обозначим

$$G(p,x) = \frac{e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}}{p}.$$

Воспользовавшись формулой (6) в прил. 3, находим, что

$$\mathcal{L}^{-1}(G(p,x)) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2}ds = Erfc\frac{x}{2a\sqrt{t}} = g(x,t).$$

Далее воспользуемся формулой Дюамеля , согласно которой

$$\mathcal{L}^{-1}(pM(p)G(p)) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu(t) * g(t)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \mu(\tau)Erfc\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}d\tau.$$

Вычислим производную

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \mu(\tau)Erfc\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}d\tau = \mu(t)Erfc(+\infty) + \int\limits_0^t \mu(\tau)\frac{\partial}{\partial t}Erfc\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t \mu(\tau)(-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\frac{-x}{4a(t-\tau)^{3/2}})d\tau =$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}}\exp^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\mu(\tau)d\tau.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $Erfc(+\infty)=0$.

Итак, решение задачи имеет вид, уже полученный нами ранее (см. (1.25))

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}}\exp^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\mu(\tau)d\tau.$$

Заключение.

Итак, интегральные преобразования позволяют избавиться от частной производной по одной из независимых переменных, заменяя операцию дифференцирования по выбранной переменной на операцию умножения образа на степень "новой"переменной. В преобразованном уравнении будет на одну переменную меньше, чем в исходном, т. е. задача существенно упрощается. Так, например, в случае двух независимых переменных вместо исходного уравнения в частных производных для искомой функции получается обыкновенное дифференциальное уравнение для ее образа, которое легко решается.

В рассмотренных выше примерах интегральные преобразования применялись к уравнениям с постоянными коэффициентами. Легко видеть, что они применимы также и к уравнениям с переменными коэффициентами, не зависящими от переменной самого интегрального преобразования. Например, преобразование Лапласа применимо для решения задачи Коши для уравнения вида

$$u_t=a(x)u_{xx}+b(x)u_x+c(x)u.$$

Действительно, применив преобразование Лапласа по переменной t к этому уравнению, для образа $U(p,x)$ получим уравнение

$$pU-\phi(x)=a(x)\frac{d^2U}{dx^2}+b(x)\frac{dU}{dx}+c(x)U,\ \infty\le x\le+\infty,$$

где через $\phi(x)$ обозначена начальная функция $(u(x,0)=\phi(x))$.

Аналогично, преобразования Фурье по переменной x могут быть применены при решении задач для уравнений вида

$$u_t=a(t)u_{xx}+b(t)u_x+c(t)u.$$

Но есть и другие интегральные преобразования, которые действуют несколько более сложным образом и применимы к уравнениям с коэффициентами, зависящими от переменной преобразования. Например, преобразование Ханкеля, определяемое формулой

$$\mathcal{H}(u(r)) = \int\limits_0^{+\infty} r I_0(\xi r) u(r) dr = U(\xi),$$

где $I_0(s)$ — функция Бесселя первого рода. Для этого преобразования справедливо соотношение

$$\mathcal{H}[u''(r) + \frac{1}{r}u'(r)] = -\xi^2 U(\xi),$$

т. е. это преобразование заменяет действие некоторого дифференциального оператора умножением образа на степень "новой"переменной. Это преобразование применяется для решения уравнения Бесселя.

Далее, всюду выше рассматривались только однородные уравнения, хотя интегральные преобразования могут применяться при решении задач и для неоднородных уравнений. Например, при решении задачи Коши для неоднородного параболического уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} + g(x,t)$$

с помощью преобразования Лапласа для образа $U(p,x)$ получим уравнение

$$\frac{d^2U}{dx^2} - pU = -\phi(x) - G(p,x),$$

где через $G(p,x)$ обозначен образ функции $g(x,t)$.

2. Фундаментальные решения

В предыдущем разделе методом интегральных преобразований были получены решения различных задач для уравнения теплопроводности $u_t = a^2 u_{xx}$. В частности, для решения $u(x,t)$ задачи Коши на бесконечной прямой (задачи 1.1) была получена формула (1.12):

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \phi(\xi) d\xi.$$

(Напомним, что через $\phi(x)$ обозначена начальная функция: $u(x,0) = \phi(x)$.)

Это решение было построено с помощью экспоненциального преобразования Фурье, т. е. предполагалось, что функция $\phi(x)$ такова, что к ней применимо это преобразование, например, функция быстро убывает при $x \to \pm\infty$. Но легко видеть, что полученный интеграл за счет множителя $e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$ сходится и для гораздо более широкого класса функций $\phi(x)$, например, для любых функций, растущих степенным образом. Более того, можно доказать, что и для этого широкого класса функций полученная формула по-прежнему дает решение задачи Коши.

Всюду выше предполагалось, что начальный момент времени совпадает со значением $t = 0$. Можно рассматривать более общую постановку задачи Коши, т. е. считать, что начальный момент — это $t = t_0$. Нетрудно проверить, что в этом случае решение задачи Коши запишется в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-t_0)}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \phi(\xi) d\xi.$$

Обозначим

$$\Gamma(x,\xi;t,\tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}. \tag{2.1}$$

Можно проверить, что функция $\Gamma(x,\xi;t,\tau)$ при $x \neq \xi$, $t \neq \tau$ удовлетворяет уравнению теплопроводности по переменным x, t. Действительно,

$$\Gamma_x = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{x-\xi}{2[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}},$$

$$\Gamma_{xx} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} + \frac{(x-\xi)^2}{4[a^2(t-\tau)]^{5/2}} \right] e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}},$$

$$\Gamma_t = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[-\frac{a^2}{2[a^2(t-\tau)]^{3/2}} + \frac{a^2(x-\xi)^2}{4[a^2(t-\tau)^{5/2}} \right] e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}},$$

т. е. $\Gamma_t = a^2 \Gamma_{xx}$.

Функцию $\Gamma(x,\xi;t,\tau)$ называют фундаментальным решением уравнения теплопроводности или **функцией источника**. Фундаментальное решение

$\Gamma(x,\xi;t,\tau)$ представляет температуру в точке x в момент времени t, если в начальный момент времени $t=\tau$ в точке ξ мгновенно выделяется количество тепла $Q=1$.

Перепишем полученные выше решения задач 1.1, 1.3, 1.4 для уравнения теплопроводности, используя фундаментальное решение $\Gamma(x,\xi;t,\tau)$.

Формула (1.12), дающая решение задачи Коши для неограниченной прямой, принимает вид:

$$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(x,\xi;t,0)\phi(\xi)d\xi. \tag{2.2}$$

Формула (1.25), дающая решение первой краевой задачи для полуограниченной прямой (задача 1.3), принимает вид:

$$u(x,t)=2a^2\int\limits_0^t\frac{\partial\Gamma}{\partial\xi}(x,0;t,\tau)\mu(\tau)d\tau. \tag{2.3}$$

Формула (1.26), дающая решение второй краевой задачи для полуограниченной прямой (задача 1.4), принимает вид:

$$u(x,t)=2a^2\int\limits_0^t\Gamma(x,0;t,\tau)g(\tau)d\tau. \tag{2.4}$$

В заключение данного раздела решим еще две задачи для полупрямой.

Задача 2.1. Найти решение однородного уравнения теплопроводности $u_t=a^2u_{xx}$, удовлетворяющее условиям:

$$\begin{gathered}u(x,0)=\phi(x),\quad 0<x<\infty;\\ u(0,t)=0,\ \ t>0.\end{gathered} \tag{2.5}$$

Задача 2.2. Найти решение однородного уравнения теплопроводности $u_t=a^2u_{xx}$, удовлетворяющее условиям:

$$\begin{gathered}u(x,0)=\phi(x),\quad 0\le x\le\infty;\\ \tfrac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0,\quad 0\le t\le\infty.\end{gathered} \tag{2.6}$$

Для того чтобы построить решения задач 2.1, 2.2, воспользуемся уже построенным решением (1.12) (или что то же самое решением (2.2)) для неограниченной прямой. Предварительно докажем две простые леммы, которым удовлетворяет решение (1.12), т. е. функция

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \phi(\xi) d\xi.$$

Лемма 1. *Если начальная функция $\phi(x)$ нечетна, то функция $u(x,t)$ обращается в нуль при $x = 0$ при всех $t > 0$, т. е. $u(0,t) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем функцию $u(x,t)$ при $x = 0$:

$$u(0,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}} \phi(\xi) d\xi.$$

Поскольку по условию леммы функция $\phi(\xi)$ нечетна ($\phi(\xi) = -\phi(-\xi)$), подынтегральная функция также является нечетной функцией по переменной ξ, и, следовательно, интеграл равен нулю, т. е. действительно, $u(0,t) = 0$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если начальная функция $\phi(x)$ четна, то производная u_x обращается в нуль при $x = 0$ при всех $t > 0$, т. е. $u_x(0,t) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Принимая без доказательства тот факт, что можно дифференцировать по параметру под знаком несобственного интеграла, вычислим производную u_x:

$$\frac{\partial\ u}{\partial x} = -\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-\xi}{2a^2 t} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}} \phi(\xi) d\xi.$$

При $x = 0$ получаем

$$\frac{\partial\ u}{\partial x}(0,t) = -\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi}{2a^2 t} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}} \phi(\xi) d\xi.$$

Поскольку по условию леммы начальная функция $\phi(\xi)$ четна, а функция $\frac{\xi}{2a^2 t}$, напротив, нечетна по переменной ξ, то вся подынтегральная функция будет нечетной (по переменной интегрирования), и, следовательно, рассматриваемый интеграл равен нулю. Лемма доказана.

Используя доказанные леммы, построим решения задач 2.1, 2.2. Рассмотрим сначала задачу 2.1. Функция $\phi(x)$ в этой задаче определена лишь при

$x > 0$. Продолжим ее нечетным образом на полуось $x < 0$, т. е. определим новую функцию $\Phi(x)$, заданную уже на всей оси x:

$$\Phi(x) = \phi(x), \ \ x > 0; \ \ \Phi(x) = -\phi(-x), \ \ x < 0.$$

Взяв эту функцию в качестве начальной, решим задачу Коши для неограниченной прямой. Обозначим решение этой задачи через $U(x,t)$:

$$U(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \Phi(\xi) d\xi.$$

Рассматривая значения функции $U(x,t)$ только в интересующей нас области $x \geq 0$, получим функцию $u(x,t)$ — решение задачи 2.1:

$$u(x,t) = U(x,t), \ \ x > 0.$$

Пользуясь определением функции $\Phi(x)$, приходим к формуле

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \Phi(\xi) d\xi + \tfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \Phi(\xi) d\xi =$$

$$= \tfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} (-\phi(-\xi)) d\xi + \tfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \phi(\xi) d\xi =$$

$$= -\tfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \phi(\xi) d\xi + \tfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \phi(\xi) d\xi =$$

$$= \tfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{+\infty} [e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}}] \phi(\xi) d\xi.$$

Очевидно, что функция $u(x,t)$ обращается в нуль при $x = 0$. Решение задачи 2.1 построено.

Получившуюся формулу можно переписать в виде

$$u(x,t) = \int\limits_{0}^{+\infty} [\Gamma(x,\xi;t,0) - \Gamma(x,-\xi;t,0)] \phi(\xi) d\xi. \tag{2.7}$$

Для того чтобы решить задачу 2.2, воспользуемся леммой 2, т. е., продолжив начальную функцию $\phi(x)$ четным образом, построим новую функцию $\tilde{\Phi}(x)$, определенную уже на всей оси x:

$$\tilde{\Phi}(x) = \phi(x), \ \ x > 0; \ \ \tilde{\Phi}(x) = \phi(-x), \ \ x < 0.$$

Взяв эту функцию в качестве начальной, опять решим задачу Коши для неограниченной прямой и получим функцию $\tilde{U}(x,t)$:

$$\tilde{U}(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \tilde{\Phi}(\xi) d\xi. \tag{2.8}$$

Значения этой функции в интересующей нас области $x \geq 0$ совпадают с решением $u(x,t)$ задачи 2.2. Заменив под интегралом функцию $\tilde{\Phi}(x)$ ее выражением (2.8) и сделав соответствующие преобразования в интеграле, приходим к формуле

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{+\infty} [e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}}] \phi(\xi) d\xi,$$

которая также может быть записана в виде

$$u(x,t) = \int\limits_{0}^{+\infty} [\Gamma(x,\xi;t,0) + \Gamma(x,-\xi;t,0)] \phi(\xi) d\xi. \tag{2.9}$$

Итак, мы получили решения различных задач для уравнения теплопроводности в виде интегралов (2.2) —(2.4), (2.7), (2.9). Мы видим, что во всех случаях подынтегральные функции выражаются через фундаментальное решение (или его производную) и заданные граничные или начальные функции.

3. Вариационное исчисление

Вариационное исчисление изучает методы, позволяющие находить максимальные и минимальные значения функционалов. Задачи, в которых требуется исследовать функционал на максимум или минимум, называются **вариационными задачами.**

Напомним, что функционалом называется оператор F, ставящий в соответствие каждому элементу y линейного пространства Y $(y \in Y)$ число $z \in R^1$: $z = Fy$. Если элементами пространства Y являются некоторые функции, то можно сказать, что функционал F — это "функция от функции", $F(y(x))$. В дальнейшем будем называть аргумент функционала $F(y(x))$, т. е. функцию $y(x)$, точкой пространства Y.

Первой задачей вариационного исчисления была задача о **брахистохроне**, сформулированная И.Бернулли в 1696 г.. В этой задаче необходимо было найти кривую, соединяющую две заданные точки $C(0,0)$ и $B(a,b)$ (лежащие в плоскости x, y) и обладающую тем свойством, что материальная точка, двигаясь без трения, скатится по этой кривой из точки C в точку B за кратчайшее время. Искомая кривая и была названа брахистохроной.

Покажем,что решение этой задачи сводится к нахождению среди множества всех кривых, проходящих через точки C, B, кривой, на которой некоторый интеграл достигает минимального значения. Ось ox направим горизонтально, ось oy — вертикально вниз. Пусть уравнение кривой CB есть $y = u(x)$. Рассмотрим некоторый момент времени t, и пусть в этот момент движущаяся точка находится на расстоянии y от оси x. Тогда $v = \sqrt{2mgy} = \sqrt{2mgu}$, где v — скорость движущейся точки. В то же время

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + (u')^2}\frac{dx}{dt}.$$

Отсюда

$$dt = \sqrt{\frac{1 + (u')^2}{2mgu}}dx.$$

Обозначим через T время, в течение которого материальная точка достигнет точки B. Интегрируя, находим

$$T = T(u(x)) = \frac{1}{\sqrt{2mg}}\int_0^a \sqrt{\frac{1 + (u')^2}{u}}dx.$$

Таким образом, задача свелась к тому, что среди всех кривых, проходящих через точки $C(0,0)$ и $B(a,b)$, надо найти кривую $y = u(x)$, для которой интеграл, с помощью которого выражается время T, принимает минимальное значение.

Основные законы физики также часто формулируются на языке вариационных принципов. Например, согласно принципу Ферма свет при распространении из одной точки в другую выбирает путь, которому соответствует наименьшее время распространения. Можно так же, как и в задаче о брахистохроне, записать время распространения света в виде некоторого интеграла и тем самым свести задачу к нахождению кривой, проходящей через две заданные точки и дающей минимум этому интегралу. Другой пример, принцип Гамильтона, согласно которому частица в консервативном поле движется так, что интеграл действия

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} (E_1 - E_2) dt$$

будет минимальным. Здесь обозначено: E_1 — кинетическая энергия, E_2 — потенциальная энергия, t — время. В приведенных примерах физические явления развиваются только так, что эти функционалы (в первом — время, во втором — интеграл действия) принимают наименьшее значение.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением функционалов в виде интегралов, т. е. будем считать, что пространство Y — это некоторое линейное нормированное пространство, элементами которого являются функции $y(x)$, k раз дифференцируемые на отрезке $[a, b]$ ($y(x) \in C^{(k)}[a, b]$), и функционал имеет вид:

$$I(y) = \int\limits_a^b f(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(k)}(x)) dx, \quad k \geq 1. \tag{3.1}$$

Итак, среди множества Y рассматриваемых функций необходимо найти функцию, которая доставляет **экстремум (максимум или минимум)** некоторому функционалу $F(y)$. Стратегия поиска будет такой же, как и при поиске экстремума дифференцируемой функции $z(t)$ в дифференциальном исчислении. Там мы находили стационарные точки функции $z(t)$, определявшиеся условием: $z'(t) = 0$. Уравнение $z'(t) = 0$ представляет из себя некоторое алгебраическое уравнение относительно числовой переменной t.

В вариационном исчислении все будет несколько сложнее, поскольку аргументом функционала является не числовая переменная, а функция. Однако, общий подход остается прежним: мы вычислим так называемую **первую вариацию** $\delta F(y)$ функционала $F(y)$ и и приравняем ее нулю. Для конкретных, часто встречающихся функционалов вида (3.1), из условия равенства нулю вариации мы получим соотношение, которому должны удовлетворять функции, доставляющие экстремум функционалу, но теперь это будет не алгебраическое, а **дифференциальное** уравнение.

3.1. Вариация функционала

Перед тем как перейти к реализации намеченного плана, введем несколько общих понятий. Пусть F — функционал, определенный на линейном пространстве Y, элементами которого являются функции $y(x)$, определенные на некотором интервале $[a, b]$. Пусть функция $y_1(x) \in Y$ фиксирована, а функция $y(x)$ — любая функция из множества Y. Разность $\delta y = y(x) - y_1(x)$ назовем приращением или **вариацией** аргумента $y(x)$ функционала $F(y(x))$. Очевидно, что $(\delta y)^{(k)} = \delta(y^{(k)})$, т. е. k-я производная вариации δy равна вариации k-й производной $y^k(x)$.

Поскольку δy — это некоторая функция, то для оценки ее величины естественно использовать понятие нормы функции. В дальнейшем мы будем рассматривать функции $y(x)$ либо непрерывные, либо k раз непрерывно дифференцируемые. В первом случае

$$||\delta y|| = ||\delta y||_{C[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |\delta y(x)|,$$

во втором случае —

$$||\delta y|| = ||\delta y||_{C^k[a,b]} = max[\max_{x\in[a,b]} |\delta y(x)|, \max_{x\in[a,b]} |\delta y'(x)|, \dots, \max_{x\in[a,b]} |\delta y^{(k)}(x)|].$$

Приращением функционала $F(y(x))$ в точке $y(x)$, отвечающим приращению (вариации) δy аргумента $y(x)$, назовем разность значений функционала:

$$\Delta F(y, \delta y) = \Delta F = F(y + \delta y) - F(y).$$

Заметим, что при фиксированном $y(x)$ приращение ΔF является функционалом от δy.

Определение 1. Если приращение $\Delta F(y, \delta y)$ можно представить в виде

$$\Delta F(y, \delta y) = L(y(x)), \delta y) + r(y(x), \delta y), \tag{3.2}$$

где $L(y(x), \delta y)$ — линейный по отношению к δy функционал, а остаток $r(y(x), \delta y)$ — бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $||\delta y||$, то есть

$$\frac{r(y(x), \delta y)}{||\delta y||} \to 0$$

при $||\delta y|| \to 0$, то функционал называется дифференцируемым в точке $y(x) \in Y$, и линейная по отношению к δy часть приращения функционала, т. е. функционал $L(y(x), \delta y)$ называется **вариацией (или первой вариацией) функционала** $F(y(x))$ в точке $y(x)$ и обозначается δF. Итак, $\delta F = L(y(x), \delta y)$. Очевидно, что определение вариации функционала аналогично определению дифференциала функции, который определяется как главная линейная часть приращения функции.

Напомним, что функционал $F(z)$ называется линейным, если выполняются соотношения:
$F(\alpha z) = \alpha F(z)$ для любой константы α, и $F(z_1 + z_2) =$
$= F(z_1) + F(z_2)$ для любых $z_1, z_2 \in Y$.

Понятие вариации было введено для функционала $F(y)$, приращение которого может быть представлено в виде суммы линейного относительно δy функционала и остатка, который при $||\delta y|| \to 0$ является малой более высокого порядка малости, чем $||\delta y||$. Но понятие вариации вводится и для более широкого класса функционалов, для которых из приращения нельзя выделить главную линейную часть.

Пусть $F(y(x))$ функционал, определенный на некотором линейном нормированном пространстве функций Y, и пусть $y(x)$ —некоторая функция из этого пространства. Вариацию этой функции возьмем в виде $\delta y(x) =$ $= th(x)$, где $h(x)$ — некоторая фиксированная функция из пространства Y, отличная от тождественного нуля (т. е. $||h(x)|| \geq 0$), а t — некоторый числовой параметр. При фиксированных $y(x)$, $h(x)$ функционал $F(y(x) + th(x))$ является обычной функцией параметра t.

Определение 2. Если для фиксированного $y(x)$ функция $F(y(x) + th(x))$ переменного t дифференцируема при $t = 0$ для любого $h(x) \in Y$, то ее производная

$$\left.\frac{dF(y + th)}{dt}\right|_{t=0} \tag{3.3}$$

называется вариацией функционала F в точке $y(x)$ и обозначается δF.

Естественно, что для дифференцируемого функционала $F(y)$ вариации, определенные двумя различными способами, должны совпадать. Действительно, справедлива следующая лемма.

Лемма. Пусть $F(y(x))$ дифференцируемый функционал. Тогда

$$L(y,h) = \left.\frac{dF(y+th)}{dt}\right|_{t=0} = \delta F,$$

т. е. линейная часть приращения дифференцируемого функционала совпадает со значением в нуле производной функции $F(y+th)$ по параметру t.

Доказательство. По определению

$$\frac{dF(y+th)}{dt}|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{F(y+th)-F(y)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta F(y,th)}{t}.$$

Но по условию леммы функционал $F(y)$ дифференцируемый и, следовательно, согласно (3.2)

$$\lim_{t\to 0}\frac{\Delta F(y,th)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{L(y,th)+r(y,th)}{t},$$

где a) $L(y,th)$ — линейный относительно приращения $th(x)$ функционал,

b) $r(y,th)$ при $||th|| \to 0$ является бесконечно малой более высокого порядка малости, чем $||th||$.

Из a) следует, что

$$L(y,th) = tL(y,h).$$

Из b) следует, что

$$\lim_{t\to 0}\frac{|r(y,th|}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{|r(y,th|}{||ht||}|h| = 0.$$

Лемма доказана.

Приведем пример вычисления вариации функционала как первым, так и вторым способами.

Задача 3.1. Пусть функционал

$$I(y) = \int\limits_a^b y^2(x)dx$$

задан в пространстве $Y = C[a,b]$. Доказать, что этот функционал является дифференцируемым для любой функции $y(x) \in C[a,b]$ и вычислить его вариацию.

Приращение функционала имеет вид:

$$\Delta I = \int\limits_a^b [(y(x) + \delta y(x))^2 - y^2(x)]dx =$$

$$= \int\limits_a^b 2y(x)\delta y(x)dx + \int\limits_a^b (\delta y(x))^2 dx = I_1 + I_2.$$

Первый интеграл I_1 при каждой фиксированной функции $y(x)$ является линейным относительно δy функционалом, т. е. $I_1 = L(\delta y) = \delta I$.

Для второго интеграла I_2 справедлива оценка

$$|I_2| = \int\limits_a^b (\delta y(x))^2 dx \leq (\max_{x\in[a,b]} |\delta y(x)|)^2 \int\limits_a^b dx = ||\delta y(x)||^2 (b-a),$$

и, следовательно, $I_2/||\delta y(x)|| \to 0$ при $||\delta y(x)|| \to 0$.

Таким образом, приращение функционала представимо в виде суммы линейной относительно δy части I_1 и остатка, имеющего второй порядок малости относительно $||\delta y||$. Согласно определению, данный функционал дифференцируем для любой функции $y(x) \in C[a,b]$ и его вариация

$$\delta I = I_1 = 2\int\limits_a^b y(x)\delta y(x)dx.$$

Вычислим теперь вариацию, используя второе определение. При фиксированных $y(x)$, δy рассмотрим функцию

$$I(y + t\delta y) = \int\limits_a^b (y(x) + t\delta y(x))^2 dx$$

переменной t. Производная функции $I(y + t\delta y)$ по переменной t имеет вид:

$$\frac{dI(y + t\delta y)}{dt} = \int\limits_a^b 2(y(x) + t\delta y(x))\delta y(x)dx,$$

и согласно определению

$$\delta I = \frac{dI(y + t\delta y)}{dt}|_{t=0} = \int\limits_a^b 2y(x)\delta y(x)dx.$$

Замечание. Для дифференцируемых функционалов вариацию можно вычислять двумя способами, но первый способ дает больше информации о приращении функционала, поскольку вычисляется не только вариация δI, т. е. главная часть приращения, но и остаток $r(y, \delta y)$, т. е. добавка к этой главной части.

3.2. Экстремум функционала

Говорят, что функционал $F(y(x))$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ максимума, если значение функционала $F(y(x))$ на любой близкой к $y_0(x)$ кривой не больше, чем $F(y_0(x))$, т. е.

$$F(y(x)) \leq F(y_0(x))$$

или, что то же самое,

$$\Delta F = F(y(x)) - F(y_0(x)) \leq 0.$$

Если равенство $\Delta F = 0$ выполняется только при $y = y_0(x)$, то говорят, что на кривой $y = y_0(x)$ достигается строгий максимум.

Аналогично определяется кривая, на которой реализуется минимум функционала $F(y(x))$. В этом случае $\Delta F \geq 0$ на всех кривых, близких кривой $y = y_0(x)$.

Задача 3.2. Доказать, что функционал $I(y) = \int\limits_0^1 (x^4 + y^2(x))dx$ на кривой $y_0(x) \equiv 0$ достигает строгого минимума.

Действительно, приращение функционала на кривой $y(x) \equiv 0$ имеет вид:

$$\Delta I = I(y(x)) - I(0) = \int\limits_0^1 (x^4 + y^2)dx - \int\limits_0^1 x^4 dx = \int\limits_0^1 y^2 dx \geq 0,$$

и $\Delta I = 0$ только при $y = y_0(x) \equiv 0$.

Замечание. В определении экстремума использовалось словосочетание "близкие кривые". В зависимости от того, какой смысл вкладывается в понятие близости кривых, различают **сильные** и **слабые** экстремумы. Если рассматриваются кривые, близкие в норме пространства $C[a,b]$, т. е. такие, что мала величина $\max|y(x) - y_0(x)|$, то такой экстремум называют **сильным**. Если же рассматриваются кривые, близкие в норме пространства $C^{(k)}[a,b]$, т. е. такие кривые, которые не только сами близки к кривой $y_0(x)$, но и их производные до k-го порядка включительно близки к соответствующим производным функции $y_0(x)$, то такой экстремум называется **слабым**. В случае слабого экстремума множество "близких"к $y_0(x)$ функций содержит меньше функций, чем в случае сильного экстремума, поскольку сами функции $y(x)$ могут мало отличаться от функции $y_0(x)$, но, тем не менее, производные этих функций могут весьма сильно отличаться от производных функции $y_0(x)$. Таким образом, сильный экстремум всегда является и слабым, но не наоборот.

Будем в дальнейшем для сокращения записи обозначать приращение аргумента $y(x)$ функционала $F(y(x))$ через $h(x)$, т. е. $\delta y = h(x)$.

Необходимое условие экстремума

Пусть точка $y = y_0(x)$ является точкой экстремума функционала $F(y)$ и в этой точке существует вариация $\delta F(y_0, h)$. Тогда

$$\delta F(y_0, h) = 0$$

для любой $h(x) \in Y$.

Доказательство. Рассмотрим функционал $F(y_0 + th)$, где $h \in Y$. При фиксированном $h(x)$ — это обычная функция, зависящая от переменной t, которая при $t = 0$ имеет экстремум. Следовательно, $\frac{dF(y_0+th)}{dt}|_{t=0} = 0$. Но, согласно определению, $\frac{dF(y_0+th)}{dt}|_{t=0} = \delta F$, и таким образом $\delta F(y_0, h) \ = 0$. Лемма доказана.

В дифференциальном исчислении внутренние точки области определения дифференцируемой функции $(f(x)$, в которых обращается в нуль ее первая производная, называются стационарными точками, и экстремум функции может достигаться только в них. В вариационном исчислении кривые, для которых первая вариация функционала $F(y(x))$ обращается в нуль, называются **стационарными точками** функционала или **экстремалями** функционала. Еще раз отметим, что экстремум функционала может достигаться только на этих кривых.

Отметим также, что условие обращения в нуль первой вариации функционала является лишь **необходимым**: на экстремалях экстремум может достигаться, но может и не достигаться. Для того чтобы утверждать, что на экстремали действительно достигается экстремум, нужно еще и выполнение **достаточных** условий. В некоторых случаях, когда удается установить знак приращения функционала, этот вопрос решается просто. Но в общем случае эти исследования сложны и выходят за рамки нашего изложения.

Замечание. Необходимое условие использует только тот факт, что первая вариация функционала обращается в нуль на экстремали, и одинаково как для слабого, так и для сильного экстремума. При проверке же достаточных условий имеет значение, какой вид экстремума (слабый или сильный) рассматривается.

Поясним это замечание примером. Пусть функционал имеет вид:

$$I(y) = \int\limits_0^1 y^2(x)(1-(y')^2(x))dx$$

и рассматривается на множестве Y непрерывно дифференцируемых функций $y(x)$ таких, что $y(0)=0$, $y(1)=0$.

Для того чтобы выписать выражение для первой вариации этого функционала, воспользуемся вторым способом (см.(3.3)). Рассмотрим функцию

$$I(y+th) = \int\limits_0^1 (y(x)+th(x))^2[1-(y'(x)+th'(x))^2]dx$$

и вычислим ее производную по t:

$$\frac{dI(y+th)}{dt} = \int\limits_0^1 \{2(y+th)h[1-(y'+th')^2]-$$

$$-2(y+th)^2(y'+th')h'\}dx.$$

Согласно определению, первая вариация функционала

$$\delta I = \left.\frac{dI(y+th)}{dt}\right|_{t=0} = \int\limits_0^1 2yh[1-(y')^2]dx - 2y^2y'h']dx,$$

и легко видеть, что δI обращается в нуль при $y(x)\equiv 0$, и, следовательно, $y(x)\equiv 0$ — экстремаль данного функционала.

На этой экстремали $I(y)=0$ и приращение

$$\Delta I = I(0+h) - I(0) = \int\limits_0^1 h^2(1-(h')^2)dx.$$

Это приращение при $h \neq 0$ и $|h'| < 1$ положительно, так что на экстремали $y(x) \equiv 0$ исследуемый функционал достигает слабого минимума.

Перейдем теперь к рассмотрению конкретных, часто встречающихся функционалов, для которых проанализируем необходимое условие экстремума, т. е. выпишем первую вариацию и найдем экстремали функционала. Предварительно докажем **основную лемму** вариационного исчисления.

Основная лемма. *Если функция $f(x) \in C[a,b]$ и для любой функции $h(x) \in C[a,b]$ выполнено соотношение*

$$\int\limits_a^b f(x)h(x)dx = 0,$$

то $f(x) \equiv 0$.

Доказательство. Предположим, что $f(x)$ отлична от тождественного нуля. Тогда существует точка $x_0 \in (a,b)$ такая, что $f(x_0) \neq 0$. Будем для определенности считать, что $f(x_0) > 0$. Поскольку функция $f(x)$ по условию леммы непрерывна, то существует некоторая окрестность $(x_0-\delta, x_0+\delta) \in [a,b]$, в которой функция $f(x)$ сохраняет знак, т. е. в точках этой окрестности $f(x) > 0$. Рассмотрим непрерывную функцию $h(x)$, для которой $h(x_0) > 0$, $h(x) \geq 0$ на интервале $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $h(x) \equiv 0$ вне этого интервала. Для этой функции

$$\int\limits_a^b f(x)h(x)dx = \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)h(x)dx > 0,$$

что противоречит условиям леммы. Лемма доказана.

Замечание. Доказательство леммы остается верным, если считать $h(x)$ функциями класса $C^{(k)}[a,b]$, удовлетворяющими некоторым граничным условиям, т. е. для более узкого класса функций, чем просто непрерывные функции, например, $h(x) \in C^{(1)}$, $h(a) = h(b)$.

3.3. Простейшая задача вариационного исчисления

Рассмотрим функционал вида

$$I(y) = \int\limits_a^b f(x, y(x), y'(x))dx.$$

Предположим, что функция $f(x, y, y')$ имеет непрерывные частные производные по всем аргументам до второго порядка включительно. Рассмотрим задачу: среди всех кривых $y = y(x)$ ($y(x) \in C^{(2)}[a, b]$), проходящих через две заданные точки (a, A), (b, B), найти кривую, на которой реализуется экстремум функционала $I(y)$.

Эта вариационная задача называется задачей с неподвижными концами, так как рассматриваются кривые, концы которых "закреплены"в соответствующих точках:

$$y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

Найдем вариацию функционала. По определению,

$$\delta I(y, h) = \left.\frac{dI(y + th)}{dt}\right|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt}\int\limits_a^b f(x, y(x) + th(x), y'(x) + th'(x))dx\Big|_{t=0} =$$

$$= \int\limits_a^b [f'_y(x, y, y')h + f'_{y'}(x, y, y')h']dx.$$

(Здесь проведено дифференцирование интеграла по параметру.) Итак,

$$\delta I(y, h) = \int\limits_a^b [f'_y(x, y, y')h + f'_{y'}(x, y, y')h']dx.$$

Будем искать экстремали функционала. Отметим, что поскольку все рассматриваемые кривые $y = y(x)$ должны проходить через заданные точки, приращения $h(x)$ (разности между двумя допустимыми кривыми) должны удовлетворять соотношениям

$$h(a) = h(b) = 0.$$

Преобразуем интеграл от второго слагаемого в выписанном выше выражении для вариации с помощью интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b f'_{y'}(x,y,y')h'dx = (f'_{y'}h)|_a^b - \int\limits_a^b \frac{df_{y'}}{dx}h(x)dx = -\int\limits_a^b \frac{df_{y'}}{dx}h(x)dx. \qquad (3.4)$$

(Здесь использованы условия $h(a) = h(b) = 0$.) Таким образом, первая вариация может быть записана в виде

$$\delta I(y,h) = \int\limits_a^b [f'_y - \frac{d}{dx}f'_{y'}]hdx,$$

и, следовательно, для экстремалей функционала (стационарных точек функционала) должно выполняться равенство

$$\int\limits_a^b [f'_y - \frac{d}{dx}f'_{y'}]hdx = 0,$$

для любых допустимых $h(x)$. В силу основной леммы вариационного исчисления из этого равенства следует, что

$$f'_y - \frac{d}{dx}f'_{y'} = 0. \qquad (3.5)$$

Дифференциальное уравнение (3.5) называется **уравнением Эйлера** для рассматриваемого функционала и, хотя в общем виде оно кажется сложным, при подстановке в него конкретной функции $f(x,y,y')$ оно превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $y(x)$.

Итак, для нахождения экстремалей рассматриваемой задачи нужно искать решение уравнения Эйлера, удовлетворяющее условиям

$$y(a) = A, \;\; y(b) = B.$$

Только на этих решениях может достигаться экстремум функционала.

Задача 3.3. Найти экстремали функционала

$$I(y) = \int\limits_0^1 [y^2 + (y')^2]dx,$$

среди непрерывно дифференцируемых функций $y = y(x)$, удовлетворяющих условию
$$y(0) = 0, \;\; y(1) = 1.$$

В данном случае $f(x, y, y') = y^2 + (y')^2$ и, следовательно, $f_y = 2y$, $f_{y'} = 2y'$. Уравнение Эйлера принимает вид

$$2y - \frac{d}{dx}(2y') = 0,$$

или
$$y'' - y = 0.$$

Это линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение имеет вид $\beta^2 - 1 = 0$ и его корни — это $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = -1$, так что общее решение уравнения Эйлера имеет вид:
$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Учитывая граничные условия $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, получим

$$C_1 = \frac{1}{e - e^{-1}}, \;\; C_2 = -C_1,$$

и уравнение экстремали принимает вид

$$y_0(x) = \frac{1}{e - e^{-1}}[e^x - e^{-x}].$$

Итак, экстремум данного функционала на множестве непрерывно диффенренцируемых кривых, проходящих через фиксированные точки $(0, 0)$, $(1, 1)$, может достигаться только на полученной кривой $y = y_0(x)$.

Для того чтобы решить вопрос, достигается ли он на самом деле, рассмотрим приращение функционала

$$\Delta I = I(y + h) - I(y) = \int\limits_0^1 [(y + h)^2 + (y' + h')^2 - y^2 - (y')^2]dx =$$

$$= \int\limits_0^1 [2yh + 2y'h']dx + \int\limits_0^1 [h^2 + (h')^2]dx = L(h) + r(h),$$

где обозначено

$$L(h) = \int\limits_0^1 [2yh + 2y'h']dx,$$

$$r(h) = \int\limits_0^1 [h^2 + (h')^2]dx,$$

т. е. $L(h)$ — линейная часть приращения или, по определению, $L(h) = \delta I$ — это вариация функционала, $r(h)$ — остаточный член (см. (3.2))

На экстремали вариация $\delta I = 0$, и, следовательно на экстремали приращение $\Delta I = r(h)$. Из выражения для $r(h)$ мы видим, что $r(h) > 0$ для любых $h(x)$, отличных от тождественного нуля, и, следовательно, $\Delta I > 0$, т. е. на экстремали достигается минимум функционала $I(y)$. Можно вычислить это минимальное значение

$$I(y_0(x)) = \int\limits_0^1 [y_0^2 + (y_0')^2]dx = \frac{1}{(e - e^{-1})^2} \int\limits_0^1 [(e^x - e^{-x})^2 + (e^x + e^{-x})^2]dx =$$

$$= 2\int\limits_0^1 [e^{2x} + e^{-2x})dx = \frac{1}{(e - e^{-1})^2}[e^2 - e^{-2}] = \frac{e + e^{-1}}{e - e^{-1}}.$$

Таким образом, в данном простом случае мы не только нашли экстремаль данного функционала, но решили вариационную задачу до конца, так как нам удалось проверить, что на этой найденной экстремали функционал $I(y)$ достигает минимального значения.

Рассмотрим теперь другой пример, очень "похожий"на предыдущий, но такой, для которого не удастся решить задачу до конца.

Задача 3.4. Найти экстремали функционала

$$I(y) = \int\limits_0^1 [y^2 - (y')^2]dx,$$

среди непрерывно дифференцируемых функций $y = y(x)$, удовлетворяющих условию

$$y(0) = 0, \;\; y(1) = 1.$$

Легко проверить, что в данном случае уравнение Эйлера имеет вид

$$2y + \frac{d}{dx}(2y') = 0,$$

или
$$y'' + y = 0.$$
Получившееся уравнение — это линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Корнями характеристического уравнения являются $\beta_1 = i$, $\beta_2 = -i$, так что общее решение этого уравнения имеет вид $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Учитывая граничные условия $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, получим $C_1 = 0$, $C_2 = \sin 1$ и уравнение экстремали принимает вид
$$y_0(x) = \frac{\sin x}{\sin 1}.$$
Для того чтобы решить вопрос, достигается ли экстремум на данной кривой, рассмотрим, как и в задаче 3.3, приращение функционала
$$\Delta I = I(y+h) - I(y) = \int_0^1 [(y+h)^2 - (y'+h')^2 - y^2 + (y')^2]dx =$$
$$= \int_0^1 [2yh - 2y'h']dx + \int_0^1 [h^2 - (h')^2]dx = L(h) + r(h),$$
где $L(h) = \delta I(h)$ — линейная часть приращения или первая вариация функционала $I(y)$, а $r(h)$ — остаточный член:
$$r(h) = \int_0^1 [h^2 - (h')^2]dx.$$
На экстремали вариация $\delta I = 0$, и приращение $\Delta I = r(h)$, но знак интеграла $r(h)$ или что то же самое знак приращения для произвольных допустимых $h(x)$ не определен: приращение может быть как положительным, так и отрицательным. Поэтому на данном уровне исследования невозможно сделать вывод о том, достигается или нет на экстремали максимум или минимум рассматриваемого функционала.

3.4. Функционалы, зависящие от производных высшего порядка

Для функционала

$$I(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(k)}(x))dx, \qquad (3.6)$$

где $k \geq 2$, рассматривается задача, аналогичная задаче, которая уже была рассмотрена для случая $k = 1$. Среди всех кривых $y = y(x)$, $2k$ раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{aligned} &y(a) = A_0, y'(a) = A_1, \ldots, y^{(k-1)}(a) = A_{k-1}, \\ &y(b) = B_0, y'(b) = B_1, \ldots, y^{(k-1)}(b) = B_{k-1}, \end{aligned} \qquad (3.7)$$

найти кривую, на которой реализуется экстремум функционала $I(y)$.

Ограничимся рассмотрением случая $k = 2$. Найдем вариацию функционала $I(y)$. По определению,

$$\delta I(y, h) = \left.\frac{dI(y + th)}{dt}\right|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt} \int_a^b f(x, y(x) + th(x), y'(x) + th'(x)), y''(x) + h''(x))dx|_{t=0} =$$

$$= \int_a^b [f'_y(x, y, y')h + f'_{y'}(x, y, y')h' + f'_{y''}h'']dx.$$

Итак,

$$\delta I(y, h) = \int_a^b [f'_y(x, y, y')h + f'_{y'}(x, y, y')h' + f'_{y''}h'']dx.$$

Будем искать экстремали функционала (3.6). Отметим, что в силу граничных условий приращения $h(x)$ (разности между двумя допустимыми кривыми) должны удовлетворять соотношениям

$$h(a) = h'(a) = 0, \;\; h(b) = h'(b) = 0.$$

Интеграл от второго и третьего слагаемых в выписанном выше выражении для вариации преобразуем с помощью интегрирования по частям для того, чтобы "перекинуть"производные с функций h на другие сомножители. Для второго слагаемого это было уже сделано (см. (3.4))

$$\int\limits_a^b f'_{y'}(x, y, y')h'dx = -\int\limits_a^b \frac{df_{y'}}{dx}h(x)dx.$$

При этом были использованы граничные условия (3.7) лишь для самих функций $h(x)$: $h(a) = 0, \ \ h(b) = 0$.

Проделаем аналогичную процедуру и для третьего слагаемого.

$$\int\limits_a^b f'_{y''}(x, y, y')h''dx = (f'_{y''}h')\Big|_a^b - \int\limits_a^b \frac{df_{y''}}{dx}h'(x)dx = -\int\limits_a^b \frac{df_{y''}}{dx}h'(x)dx.$$

(Здесь мы использовали граничные условия (3.7) для производных функции $h(x)$: $h'(a) = h'(b) = 0$.) Получившийся интеграл еще раз возьмем по частям

$$-\int\limits_a^b \frac{df_{y''}}{dx}h'(x)dx = -\left(\frac{df_{y''}}{dx}h(x)\right)\Big|_a^b + \int\limits_a^b \frac{d^2 f_{y''}}{dx^2}h(x)dx = \int\limits_a^b \frac{d^2 f_{y''}}{dx^2}h(x)dx.$$

(Здесь использованы граничные условия $h(a) = h(b) = 0$ для функции $h(x)$.)

Таким образом, первая вариация функционала может быть записана в виде

$$\delta I(y, h) = \int\limits_a^b [f'_y - \frac{d}{dx}f'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}f'_{y''}]hdx,$$

и, следовательно, для экстремалей функционала (стационарных точек функционала) должно выполняться равенство

$$\delta I(y, h) = \int\limits_a^b [f'_y - \frac{d}{dx}f'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}f'_{y''}]hdx = 0$$

для любых допустимых $h(x)$. В силу основной леммы вариационного исчисления из этого равенства следует, что

$$f'_y - \frac{d}{dx}f'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}f'_{y''} = 0. \tag{3.8}$$

Это и есть уравнение Эйлера для случая $k = 2$.

Нетрудно убедиться в том, что применяя полученную процедуру и при $k > 2$, для нахождения экстремалей получим соотношение

$$f'_y - \frac{d}{dx} f'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f'_{y''} + \cdots (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} f'_{y^{(k)}} = 0,$$

которое является обыкновенным дифференциальным уравнением порядка $2k$.

Задача 3.5 Найти экстремали функционала

$$I(y) = \int_0^1 [y^2 + 2(y')^2 + (y'')^2] dx$$

среди функций, удовлетворяющих условию

$$y(0) = 0, y'(0) = 1; \;\; .y(1) = 0, y'(1) = \frac{e^{-1} - e}{2}.$$

В данной задаче

$$f(x, y, y', y'') = y^2 + 2(y')^2 + (y'')^2, \;\; f_y = 2y, \;\; f_{y'} = 4y', \;\; f_{y''} = 2y'',$$

и уравнение Эйлера (3.8) принимает вид

$$2y - \frac{d}{dx}(4y') + \frac{d^2}{dx^2}(2y'') = y^{(4)} - 2y'' + y = 0.$$

Это обыкновенное линейное однородное уравнение четвертого порядка с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение $\beta^4 - 2\beta^2 + 1 = (\beta^2 - 1)^2 = 0$ имеет двукратные корни $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $\beta_3 = \beta_4 = -1$, и, следовательно, общим решением уравнения Эйлера является функция

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x}.$$

Подставляя эту функцию в граничные условия, найдем значения констант C_1, C_2, C_3, C_4, и тем самым найдем экстремаль данного функционала. Можно проверить, что ее уравнение имеет вид:

$$y_0(x) = \frac{1}{2}(1 - x)(e^x - e^{-x}).$$

Замечание. Для данного функционала нетрудно вычислить и знак приращения функционала на полученной экстремали. Действительно,

$$\Delta I(y,h) = I(y+h) - I(y) =$$

$$= \int_0^1 [(y+h)^2 + 2(y'+h')^2 + (y''+h'')^2]dx -$$

$$- \int_0^1 -[y^2 + 2(y')^2 + (y'')^2]dx =$$

$$= \int_0^1 [2yh + 4y'h' + 2y''h'']dx + \int_0^1 [h^2 + 2(h')^2 + (h'')^2]dx =$$

$$= \delta I(y,h) + I_3(y,h).$$

На экстремали $\delta I(y_0,h) = 0$, и $\Delta I(y_0,h) = I_3(y_0,h)$. Интеграл $I_3(y,h)$ положителен для любых допустимых $h(x)$, и поэтому приращение $\Delta I(y_0,h) > 0$, и, следовательно, на экстремали $y = y_0(x)$ рассматриваемый функционал принимает минимальное значение.

3.5. Экстремум функционала, зависящего от нескольких функций

Рассмотрим задачу с "закрепленными концами"для функционала, зависящего от нескольких функций

$$I(y_1, y_2, \ldots, y_k) = \int_a^b f(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_k(x);\; y_1'(x), y_2'(x), \ldots, y_k'(x))dx,$$

$k \geq 2$. Предполагается, что функции $y_j(x)$ удовлетворяют граничным условиям:

$$y_j(a) = A^{(j)}, y_j(b) = B^{(j)},\;\; 1 \leq j \leq k.$$

Заметим, что в данном случае "аргументом"функционала является совокупность функций $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$ и приращение аргумента имеет вид $H = (h_1, h_2, \dots, h_k)$, где $h_j(x)$ — любые независимые друг от друга функции, такие, что

$$h_j(0) = 0, \ \ h_j(b) = 0, \ \ 1 \leq j \leq k.$$

Вариация функционала имеет вид:

$$\delta I(y, H) = \frac{dI(y + tH)}{dt}\bigg|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt} \int\limits_a^b f(x, y_1 + th_1, \dots, y_k + h_k; , y_1' + th_1, \dots, y_k' + h_k) dx|_{t=0} =$$

$$= \int\limits_a^b [f_{y_1} h_1 + \dots + f_{y_k} h_k + f_{y_1'} h_1' + \dots + f_{y_k'} h_k'] dx.$$

Полагая $H = H_1 = (h_1, 0, \dots, 0)$, $H = H_2 = (0, h_2, \dots, 0)$, $H = H_k = (0, 0, \dots, h_k)$, т. е. придавая каждый раз приращение только одной из функций $y_j(x)$, получаем

$$\int\limits_a^b [f_{y_j} h_j + f_{y_j'} h_j'] dx = 0, \ \ j = 1, 2, \dots, k.$$

Интегрируя по частям и используя граничные условия (аналогично тому, как это было сделано в случае, когда функционал зависел только от одной функции (см. раздел 3.3), для нахождения экстремалей функционала $I(y)$ получим систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{\partial f}{\partial y_j} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y_j'}) = 0, j = 1, 2, \dots, k. \tag{3.9}$$

Задача 3.6 Найти экстремаль функционала

$$I(y_1(x), y_2(x)) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [(y_1')^2 + (y_2')^2 - 2y_1 y_2] dx$$

при условиях

$$y_1(0) = 0, \ \ y_1(\pi/2) = 1;$$

$$y_2(0) = 0, \ \ y_2(\pi/2) = 1.$$

В данном случае $f(x,y_1,y_2)=(y_1')^2+(y_2')^2-2y_1y_2$, $f_{y_1}=-2y_2$, $f_{y_2}=-2y_1$, $f_{y_1'}=2y_1'$, $f_{y_2'}=2y_2'$, и система уравнений (3.9) принимает вид

$$-2y_2-\tfrac{d}{dx}(2y_1')=0,$$

$$-2y_1-\tfrac{d}{dx}(2y_2')=0,$$

или, что то же самое,

$$y_1''+y_2=0,$$

$$y_2''+y_1=0.$$

Из первого уравнения находим $y_2''=-y^{(4)}$ и второе уравнение переписывается в виде $y_1^{(4)}-y_1=0$. Характеристическое уравнение имеет вид $\beta^4-1=0$ и его корни — это $\beta_1=1$, $\beta_2=-1$, $\beta_3=i$, $\beta_4=-i$, и общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y_1(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x.$$

Воспользовавшись первым уравнением системы, найдем функцию $y_2(x)=-y_1''(x)$:

$$y_2(x)=-C_1e^x-C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x.$$

Потребовав, чтобы функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ удовлетворяли заданным граничным условиям, получим, что $C_1=C_2=C_3=0$, $C_4=1$, и, следовательно, экстремалью данного функционала является пара функций

$$y_1(x)=\sin x,\quad y_2(x)=\sin x.$$

3.6. Экстремум функционала, зависящего от функций нескольких переменных

Рассмотрим функционал вида

$$I(z(x,y)) = \iint\limits_{D} F(x,y,z,z_x,z_y)dxdy,$$

где $(x,y) \in D$, F — гладкая функция всех своих аргументов, определенная в области D. Ищется функция $z(x,y)$, принимающая на границе Γ области D заданные значения

$$z(x,y)|_{\Gamma} = \phi(x,y)$$

и дающая экстремум функционалу $I(z)$.

В данном случае ограничимся тем, что приведем (без вывода) уравнение, которому должна удовлетворять искомая функция. Оно называется уравнением Эйлера — Остроградского и имеет вид:

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} = 0.$$

Это уравнение является уравнением второго порядка в частных производных, и ищется решение этого уравнения, принимающее на границе Γ заданные граничные условия.

Задача 3.7. Для функционала

$$I(z) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (z_x^2 + z_y^2)dxdy.$$

выписать уравнение Эйлера – Остроградского.

В этом примере $F(z) = z_x^2 + z_y^2$, $F_{z_x} = 2z_x$, $F_{z_y} = 2z_y$, и уравнение Эйлера – Остроградского имеет вид:

$$z_{xx} + z_{yy} = 0.$$

Таким образом, для решения вариационой задачи необходимо решить первую краевую задачу для уравнения Лапласа: найти гармоническую функцию $z(x,y)$, принимающую на сторонах квадрата $0 < x, y < 1$ заданные граничные значения.

Замечание. Можно рассматривать эту задачу и в другом аспекте. Допустим, что каким-то способом (называемым прямым) найдено приближенное (численное) решение данной вариационной задачи. Тогда это приближенное решение является приближенным решением соответствующей краевой задачи для функции $z(x, y)$, т. е. приближенное решение вариационной задачи даст приближенное решение краевой задачи для уравнения в частных производных.

3.7. Вариационные задачи с подвижными границами

Рассмотрим другой тип вариационных задач, так называемые задачи с подвижными границами. Пусть в плоскости (x, y) заданы две кривые Γ_1 и Γ_2, определяемые соотношениями

$$\Gamma_1 : \quad y = \phi_1(x); \qquad \Gamma_2 : \quad y = \phi_2(x).$$

Рассмотрим всевозможные гладкие кривые $y = y(x)$, концы которых лежат на заданных кривых Γ_1, Γ_2. Обозначим координаты этих концов через (x_1, y_1) и (x_2, y_2) соответственно. Из того, что эти концы лежат на заданных кривых Γ_1, Γ_2, следует:

$$y_1 = \phi_1(x_1), \quad y_2 = \phi_2(x_2).$$

Отметим, что в рассматриваемом случае концы (x_1, y_1) и (x_2, y_2) кривой $y = y(x)$ — это не фиксированные, одни и те же для всех кривых $y = y(x)$ точки, как это было в рассматриваемых ранее задачах, а различные точки, свои для каждой кривой $y = y(x)$.

Вариационная задача ставится следующим образом. Среди всех кривых, концы которых лежат на заданных кривых Γ_1 и Γ_2, найти кривую $y = \tilde{y}(x)$, которая дает экстремум функционалу

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx.$$

Мы ограничимся формулировкой основного результата по данной задаче и описанием алгоритма ее решения. Справедлива следующая теорема

Теорема. Пусть кривая $y = \tilde{y}(x)$ дает экстремум функционалу

$$I(y) = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx.$$

среди всех кривых, концы которых лежат на заданных кривых Γ_1, Γ_2. Тогда

1) кривая $y = \tilde{y}(x)$ является экстремалью этого функционала,

2) в концах $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1), (\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$ кривой $y = \tilde{y}(x)$ выполняются так называемые **условия трансверсальности**

$$[F + (\phi_1' - \tilde{y}')F_{y'}]|_{x=\tilde{x}_1} = 0,$$

$$[F + (\phi_2' - \tilde{y}')F_{y'}]|_{x=\tilde{x}_2} = 0,$$

устанавливающие зависимость между угловыми коэффициентами заданных кривых Γ_1, Γ_2 и искомой экстремали в точках пересечения.

Отметим, что в случае, когда одна из кривых, например, Γ_2, является горизонтальной прямой ($y = \phi_2(x) \equiv a$) приведенное выше условие трансверсальности упрощается и принимает вид

$$[F - \tilde{y}' F_{y'}]|_{x=\tilde{x}_2} = 0,$$

Для решения задачи (в соответствии с утверждением теоремы) надо:

1. Написать и решить соответствующее уравнение Эйлера (обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка). Его общее решение даст нам семейство экстремалей $y = f(x, C_1, C_2)$, зависящее от двух произвольных постоянных C_1, C_2.

2. Среди множества всех экстремалей нужно выделить те экстремали $\tilde{y} = f(x, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2)$, которые пересекают заданные кривые Γ_1, Γ_1 в точках $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$, $(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$, т. е.

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1 = f(\tilde{x}_1, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2) = \phi_1(\tilde{x}_1), \\ \tilde{y}_2 = f(\tilde{x}_2, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2) = \phi_2(\tilde{x}_2), \end{aligned} \tag{3.10}$$

причем в этих точках — концах кривой $y = \tilde{y}(x)$, выполняются условия трансверсальности

$$
\begin{gathered}
F(\tilde{x}_1, f(\tilde{x}_1, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2), f'(\tilde{x}_1, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2))+ \\
+[\phi_1'(\tilde{x}_1) - \tilde{y}'(\tilde{x}_1)]F_{y'}(\tilde{x}_1, f(\tilde{x}_1, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2), f'(\tilde{x}_1, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2)) = 0; \\
F(\tilde{x}_2, f(\tilde{x}_2, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2), f'(\tilde{x}_2, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2))+ \\
+[\phi_1'(\tilde{x}_2) - \tilde{y}'(\tilde{x}_2)]F_{y'}(\tilde{x}_2, f(\tilde{x}_2, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2), f'(\tilde{x}_2, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2)) = 0
\end{gathered}
\tag{3.11}
$$

Таким образом, мы имеем систему четырех уравнений (3.10), (3.11) относительно четырех неизвестных: $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$, $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$. Найдя ее решение, получим искомые экстремали.

Мы рассмотрели случай, когда ни одна из кривых Γ_1, Γ_2 не является вертикальной прямой. В случае же, когда одна из заданных кривых, например, Γ_2, является вертикальной прямой, условие трансверсальности имеет другой, более простой, вид

$$
F_{y'}|_{x=\tilde{x}_2} = 0,
$$

а в остальном алгоритм решения вариационной задачи остается прежним.

Вариационные задачи могут быть и смешанного типа, т. е. одна из границ может быть неподвижна (закреплена), а другая — подвижна. Сформулируем одну из таких задач. Среди всех кривых $y = y(x)$, левый конец которых закреплен:

$$
y(a) = A,
$$

а правый скользит по заданной кривой Γ_2 $(y = \phi_2(x))$, найти кривую $y = \tilde{y}(x)$, на которой функционал

$$
I(y) = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx.
$$

достигает экстремума.

Задача 3.8. Найти кратчайшее расстояние от точки $M(-1, 5)$ до параболы $y^2 = x$.

Прежде всего из геометрических соображений очевидно, что следует искать расстояние от точки M до ветви данной параболы, лежащей в первом квадранте, т. е. до кривой $y = \sqrt{x}$. Далее, поскольку длина участка дуги кривой, задаваемой формулой $y = y(x)$, — это

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx,$$

где x_1, x_2 — абсциссы концов дуги, то вариационная задача в нашем случае формулируется следующим образом.

Найти минимум функционала

$$I(y) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx,$$

при условии, что левый конец ($x = x_1 = -1$) кривой $y = y(x)$ закреплен в точке M, т. е.

$$y(-1) = 5, \tag{3.12}$$

а правый конец ($x = x_2$) может перемещаться по параболе $y = \sqrt{x}$.

1. Найдем экстремали данного функционала. В данном случае

$$F(x, y, y') = \sqrt{1 + (y')^2}, \quad F'_{y'}(x, y, y') = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}},$$

и уравнение Эйлера принимает вид

$$\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C,$$

или, что то же самое, $y' = C_1$, и тогда $y = C_1 x + C_2$. Таким образом, множество экстремалей — это всевозможные прямые $y = C_1 x + C_2$.

2. Пусть $\tilde{y} = \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2$ — искомая экстремаль. Согласно условию (3.12) она должна проходить через точку M, т. е.

$$\tilde{C}_1(-1) + \tilde{C}_2 = 5.$$

Правый конец $(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$ искомой прямой должен лежать на параболе, т. е.

$$\tilde{C}_1 \tilde{x}_2 + \tilde{C}_2 = \sqrt{\tilde{x}_2}.$$

Кроме того, на правом конце должно быть выполнено условие трансверсальности, которое в данном случае записывается в виде

$$\sqrt{1+\tilde{C}_1^2}+(\frac{1}{2\sqrt{\tilde{x}_2}}-\tilde{C}_1)\frac{\tilde{C}_1}{1+\tilde{C}_1^2}=0,$$

или после упрощения — в виде

$$1+\frac{\tilde{C}_1}{2\sqrt{\tilde{x}_2}}=0.$$

Итак, для нахождения трех неизвестных $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$, $\tilde{x}_2$ имеем систему трех уравнений:

$$\tilde{C}_2-\tilde{C}_1=5,$$

$$\tilde{C}_1\tilde{x}_2+\tilde{C}_2=\sqrt{\tilde{x}_2},$$

$$1+\tfrac{1}{2\sqrt{\tilde{x}_2}}=0.$$

Решая эти уравнения, находим

$$\tilde{x}_2=1,\quad \tilde{C}_1=-2,\quad \tilde{C}_2=3,$$

и искомая экстремаль — это прямая $\tilde{y}=-2x+3$.

Можно доказать, что на этой экстремали действительно достигается минимум нашего функционала. Этот минимум нетрудно вычислить:

$$I(\tilde{y})=\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1+4}dx=2\sqrt{5}.$$

3.8. Условный экстремум

Пусть $I(y)$, $K(y)$ — дифференцируемые функционалы, рассматриваемые на некотором линейном нормированном пространстве Y функций $y(x)$. Задачей на **условный экстремум** называется следующая задача. Среди всех кривых, для которых функционал $K(y)$ принимает некоторое постоянное значение l, найти ту кривую, на которой функционал $I(y)$ принимает экстремальное значение. Справедлива (без доказательства)

Теорема Эйлера. *Если кривая $y = y(x)$ дает экстремум функционалу*

$$I(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

при условиях

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_2;$$

$$K(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')dx = l,$$

и если $y = y(x)$ не является экстремалью функционала $K(y)$, то существует константа λ такая, что кривая $y = y(x)$ есть экстремаль функционала

$$L(y, \lambda) = \int\limits_{x_0}^{x_1} [F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y')]dx.$$

Утверждение данной теоремы является лишь необходимым условием существования решения сформулированной вариационной задачи. Тем не менее, если из каких-то соображений известно, что решение $y = \tilde{y}(x)$ поставленной задачи существует, теорема Эйлера дает конструктивный способ построения этого решения. Действительно, интегрируя уравнение Эйлера для вспомогательного функционала $L(y, \lambda)$, получим семейство экстремалей

$$y = f(x, C_1, C_2, \lambda)$$

этого функционала, зависящее от констант интегрирования C_1, C_2 и параметра λ. Согласно теореме Эйлера, функция $\tilde{y}(x)$ принадлежит этому семейству. Следовательно, необходимо определить константы C_1, C_2 и параметр λ так, чтобы были выполнены условия

$$f(x_0, C_1, C_2, \lambda) = y_0, \quad f(x_1, C_1, C_2, \lambda) = y_1,$$

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} G(x, f(x, C_1, C_2, \lambda), f_x(x, C_1, C_2, \lambda))dx = l.$$

Таким образом, для определения трех неизвестных C_1, C_2, λ имеем систему трех уравнений. Решив ее, найдем функцию $\tilde{y}(x)$ — решение нашей вариационной задачи.

Задача 3.9. Среди всех кривых длины $l > 2a$, соединяющих точки $M_1(-a, 0)$, $M_2(a, 0)$ оси $0x$, найти кривую, ограничивающую вместе с отрезком $[-a, a]$ наибольшую площадь.

Соответствующая вариационная задача формулируется следующим образом: найти экстремум функционала

$$I(y) = \int\limits_{-a}^{a} y(x)dx; \quad y(-a) = 0, \;\; y(a) = 0,$$

при дополнительном условии

$$K(y) = \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx = l.$$

Для решения задачи в соответствии с теоремой Эйлера составим вспомогательный функционал

$$L(y, \lambda) = \int\limits_{-a}^{a} [y + \lambda\sqrt{1 + (y'(x))^2}]dx$$

и выпишем для него уравнение Эйлера. Оно имеет вид

$$1 - \frac{d}{dx}(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}} = 0,$$

или

$$\frac{d}{dx}(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}) = 1,$$

откуда получаем

$$\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}} = x + C_1.$$

Разрешив это уравнение относительно y', получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + C_1}{\sqrt{\lambda^2 - (x + C_1)^2}}.$$

Интегрируя это уравнение, приходим к соотношению

$$(x + C_1)^2 + (y + C_2)^2 = \lambda^2,$$

т. е. семейство экстремалей вспомогательного функционала $L(y, \lambda)$ — это окружности радиуса λ с центром в точке $(-C_1, -C_2)$.

Используя граничные условия, получаем

$$(-a + C_1)^2 + C_2^2 = \lambda^2,$$

$$(a + C_1)^2 + C_2^2 = \lambda^2,$$

откуда следует, что $C_1 = 0$, $C_2 = \sqrt{\lambda^2 - a^2}$ и таким образом,

$$\tilde{y}(x) = \sqrt{\lambda^2 - x^2} - \sqrt{\lambda^2 - a^2},$$

$$\tilde{y}'(x) = -\tfrac{x}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}}.$$

И наконец, для определения параметра λ осталось воспользоваться условием, что полученная окружность должна иметь заданную длину l, т. е.

$$l = K(\tilde{y}) = \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{1 + (\tilde{y}'(x))^2} dx = \int\limits_{-a}^{a} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} dx.$$

Вычисляя интеграл, получаем

$$\lambda(\arcsin \frac{x}{\lambda})|_{x=-a}^{x=a} = 2\lambda \arcsin \frac{a}{\lambda}$$

или

$$\frac{a}{\lambda} = \sin \frac{l}{2\lambda}.$$

Решая это трансцендентное уравнение, находим некоторое значение $\lambda = \lambda_0$ и затем находим величину $C_2 = \sqrt{\lambda_0^2 - a^2}$.

Таким образом, искомая кривая — это окружность радиуса λ_0 с центром в точке $(0, -\sqrt{\lambda_0^2 - a^2})$.

4. Библиографический список

1. Краснов М.Л. Вся высшая математика /М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. М.: Эдиториал УРСС, 2003. Т.6. 256 с.

2. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики /А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Наука, 2004. 798 с.

3. Шарма Дж.Н. Уравнения в частных производных для инженеров /Дж.Н.Шарма, К. Сингх. М.: Техносфера, 2002. 318 с.

4. Пантелеев А.В. Вариационное исчисление в примерах и задачах /А.В.Пантелеев. М.: Высшая школа, 2006. 272 с.

5. Бейтмен Г. Таблицы интегральных преобразований. /Бейтмен Г., Эрдейи А.: М.:Наука, 1969. Т.1. 343 с.

5. Приложения

Приложение 1

$$f(x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \to F(s) = e^{-a^2 s^2 t}.$$

Приложение 2

$$1. f(x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \to F_c(s) = e^{-a^2 s^2 t}.$$

$$2. f(x) = e^{-a\sqrt{x}} \cos(a\sqrt{x}) \to F_c(s) = a\sqrt{2}(2s)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{a^2}{2s}}.$$

$$3. f(x) = x^{-1}(a^2 + s^2)^{-1} \to F_s(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}a^2}(1 - e^{-as}).$$

Приложение 3

$$1. f(t) = e^{at} \to F(p) = \frac{p}{p-a},$$

$$2. f(t) = \frac{t^n}{n!} \to F(p) = \frac{1}{p^n},$$

$$3. f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \to F(p) = \sqrt{p},$$

$$4. f(t) = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \to F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}},$$

$$5. f(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{r^2}{4t}} \to F(p) = \frac{\sqrt{p}}{2} e^{-r\sqrt{p}}.$$

$$6. f(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2} ds = Erfc \frac{x}{2a\sqrt{t}} \to F(p) = \frac{e^{-(\sqrt{p}xa^{-1})}}{p}.$$

Содержание

Учебное издание

Леликова Елена Федоровна

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Часть 2

Редактор *Н.П.Кубыщенко*

Компьютерная верстка *Е.Ф. Леликовой*

Подписано в печать		Формат 60x84 1/6
Бумага типографская	Цифровая печать	Усл.печ.л. 4.07
Уч.-изд. л. 26	Тираж 200	Заказ

Редакционно-издательский отдел УГТУ—УПИ

620002, Екатеринбург, Мира, 19

Ризография НИЧ УГТУ—УПИ

620002, Екатеринбург, Мира, 19