ВАРИАНТ №9

Основные понятия.

1. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} + 2xt = 2te^{-t^2}, \\ tdy = \frac{xye^{t^2}}{t^2}dt + ydy, \\ x(0) = 0;\ \ y(0) = 1. \end{cases}$$

2. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению. Общее решение записать в векторной форме

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 2y - e^{-2t}, \\ \dot{y} = x + y - \cos 2t. \end{cases}$$

3. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' + y'' + y' + y = t + t^2$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

4. Найти и построить траекторию и фазовую траекторию системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

при $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

5. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{10}.$$

6. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы). Ответ записать в виде частного решения или частного интеграла

$$\begin{cases} y' = \frac{z^2}{z+y}, \\ z' = \frac{y^2}{z+y}, \\ y(0) = 2,\ \ z(0) = 1. \end{cases}$$

7. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} 4t-1 \\ t \end{pmatrix}, \\ \vec{\mathbf{x}}(0) = (0;0)^T. \end{cases}$$

8. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ записать в векторно-матричном виде.

9. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y + (2+6t)e^t, \\ \dot{y} = x - y + e^t. \end{cases}$$

10. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}} + B$ по формуле Коши

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \Phi(t)\vec{\mathbf{C}} + \Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{\mathbf{C}}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix}, \\ \vec{\mathbf{x}}(0) = (1;1)^T. \end{cases}$$

15. Исследовать устойчивость тривиального решения системы дифференциальных уравнений по корням характеристического уравнения. Подобрать функцию Ляпунова вида $u(x,y) = Ax^2+By^2$, устанавливающую соответственно устойчивость или неустойчивость этого решения. Установить тип особой точки системы. Изобразить схематично траектории системы в окрестности точки $(0,0)$.

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x - y, \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$$

16. Исследовать на устойчивость по первому приближению нулевое решение системы дифференциальнных уравнений.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3\sin x + 8\sin y, \\ \dot{y} = \sin(x+y). \end{cases}$$

17. Найти состояния равновесия системы дифференциальных уравнений, установить их характер устойчивости и тип соответствую-

щих особых точек системы.

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -4y - 2x(x^2-1). \end{cases}$$

18. Исследовать нулевое решение системы дифференциальных уравнений на устойчивость с помощью функции Ляпунова (подобрать функцию Ляпунова можно в виде $u(x,y) = Ax^2 + By^2$).

$$\begin{cases} \dot{x} = x + xy - 3y^2, \\ \dot{y} = -2y + x^2 - 3xy. \end{cases}$$

19. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}}$ с данной матрицей A, имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$