

Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный технический университет-УПИ
имени первого Президента России Б.Н.Ельцина

Е.А. Голикова

А.С. Соболева

Дифференциальные уравнения и ряды в примерах и задачах

*Учебное пособие
для технологических специальностей
физико-технического факультета*

Под общей редакцией
доц., канд. физ.-мат. наук Р.М. Миньковой

Екатеринбург
УГТУ-УПИ
2009

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.161.73
З 56

Рецензенты:

кафедра математики Уральского государственного горного университета (зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. В.Б. СУРНЕВ);
д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. В.С. БАЛАГАНСКИЙ

Голикова Е.А., Соболева А.С.

З 56 Дифференциальные уравнения и ряды : учебное пособие / Е.А. Голикова, А.С. Соболева. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2009. 76 с.

ISBN 978-5-321-01341-0

Учебное пособие подготовлено на основе расширенного текста лекций по дисциплине "Числовые и функциональные ряды, ряды Фурье, дифференциальные уравнения" для студентов технологических специальностей физико-технического факультета УГТУ-УПИ первого курса.

Издание подготовлено при поддержке физико-технического факультета УГТУ-УПИ.

Библиогр.: 34 назв. Рис. 2.

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.161.673

ISBN 978-5-321-01341-0

© УГТУ–УПИ, 2009

© Голикова Е.А., Соболева А.С., 2009

Глава 1

Дифференциальные уравнения

1.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Обыкновенное дифференциальное уравнение (ДУ) — это уравнение, связывающее независимую переменную x , искомую функцию $y(x)$ и ее производные или дифференциалы:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0. \quad (1.1)$$

Порядок n старшей производной, входящей в ДУ (1.1), называется *порядком* ДУ. Иногда ДУ (1.1) можно привести к виду

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (1.2)$$

разрешенному относительно старшей производной. Задача Коши для ДУ (1.2) состоит в нахождении для данного уравнения такого решения, которое удовлетворило бы следующим *начальным условиям* (НУ):

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_{10}, \\ y''(x_0) = y_{20}, \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-10}. \end{cases} \quad (1.3)$$

Здесь x_0 — заданное фиксированное значение аргумента, $y_0, y_{10}, \dots, y_{n-10}$ — заданные n чисел.

Для $n = 1$ получим ДУ первого порядка $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ в общем виде. $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ — ДУ первого порядка, разрешенное относительно производной искомой функции. Задача Коши для него имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (1.4)$$

На геометрическом языке задача Коши заключается в поиске той интегральной кривой дифференциального уравнения, которая проходит через начальную точку (x_0, y_0) .

★¹ Для решения ДУ первого порядка нужно правильно классифицировать уравнение. Для этого можно использовать таблицу простейших типов уравнений первого порядка из приложения (см. С.71). В следующих разделах мы классифицируем и решаем уравнения каждого типа.

1.1.1. Уравнения с разделяющимися переменными

В разделе рассматриваются уравнения, которые могут быть записаны в виде

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x) g(y) \quad \text{или} \quad (1.5)$$

$$P(x) Q(y) dx + R(x) S(y) dy = 0. \quad (1.6)$$

Предполагаем, что функции $f(x)$ и $g(y)$ непрерывны. Если $g(y) = 0$ при $y = y_1, y = y_2, \dots$, то функции $y(x) \equiv y_1, y(x) \equiv y_2, \dots$ являются, как легко видеть, решениями ДУ (1.5).

Если $g(y) \neq 0$, то, умножив обе части уравнения (1.5) на дробь $\frac{dx}{g(y)}$, получим $\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$. Тем самым переменные в уравнении разделились (откуда и название этого типа уравнений), и осталось только проинтегрировать по x обе части полученного уравнения:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C, \quad (1.7)$$

где C — произвольная константа.

Аналогично разделяются переменные в уравнении (1.6).

Пример 1. Найти общий интеграл ДУ

$$\frac{dx}{\cos^2 x \cdot \cos y} = -\operatorname{ctg} x \cdot \sin y dy.$$

Решение. Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, записанное в симметричной форме (1.6). Для разделения переменных умножим правую и левую части уравнения на $\frac{\cos y}{\operatorname{ctg} x}$:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx = -\cos y \cdot \sin y dy.$$

Интегрируя, получим

$$\int \operatorname{tg} x d \operatorname{tg} x = - \int \sin y d \sin y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x = -\frac{1}{2} \sin^2 y + C.$$

¹Звездочкой будем помечать замечания по алгоритмам решения задач.

В итоге, запишем решение в виде общего интеграла:

$$\operatorname{tg}^2 x + \sin^2 y = C .$$

Пример 2. Найти частный интеграл ДУ $s = s' \cos^2 t \ln s$, удовлетворяющий НУ $s(\pi) = 1$.

Решение. Поскольку уравнение записано в виде (1.5), то оно с разделяющимися переменными. Для разделения переменных умножим уравнение на $\frac{dt}{s \cos^2 t}$:

$$\frac{1}{\cos^2 t} dt = \frac{\ln s}{s} ds .$$

Интегрируя, получим

$$\int d \operatorname{tg} t = \int \ln s d \ln s \Rightarrow \operatorname{tg} t = \frac{1}{2} \ln^2 s + C .$$

Подставим начальные значения $t = \pi$, $s = 1$ в найденный общий интеграл и определим значение C :

$$\operatorname{tg} \pi = \frac{1}{2} \ln^2 1 + C, \Rightarrow C = 0 .$$

Следовательно, искомым частным интегралом является $2 \operatorname{tg} t = \ln^2 s$.

Пример 3. Известно, что скорость радиоактивного распада пропорциональна количеству x еще не распавшегося вещества. Найти зависимость x от времени t , если в начальный момент времени $t = t_0$ имелось $x = x_0$ вещества.

Решение. Пусть в момент времени t количество вещества есть x , в момент времени $t + \Delta t$ количество составляет $x - \Delta x$. За время Δt распадается количество вещества Δx . Отношение $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ — средняя скорость распада за время Δt , а

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

есть мгновенная скорость распада в момент времени t . Тогда ДУ процесса:

$\frac{dx}{dt} = -kx$, где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности (постоянная распада), знак « $-$ » указывает на уменьшение x при возрастании t . Разделяя переменные в ДУ и интегрируя, получаем

$$\frac{dx}{x} = -k dt \Rightarrow \ln |x| = -kt + \ln |C| \Rightarrow x = C e^{-kt} .$$

Учитывая начальное условие $x(t_0) = x_0$, находим, что $C = x_0 e^{kt_0}$, поэтому

$$x(t) = x_0 e^{-k(t-t_0)} .$$

Пример 4. Проинтегрировать уравнение

$$\frac{dy}{dx} = (x + y)^2 .$$

Решение. Здесь переменные не разделяются, но заменой можно свести данное уравнение к уравнению с разделением переменных. Положим $z(x) = x + y$, тогда

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}.$$

Подставляя в уравнение, получим

$$\frac{dz}{dx} = 1 + z^2.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dz}{1 + z^2} = dx \Rightarrow \operatorname{arctg} z = x + C \Rightarrow z = \operatorname{tg}(x + C).$$

Подставляя вместо z величину $x + y$, получаем общее решение данного уравнения

$$y = \operatorname{tg}(x + C) - x.$$

1.1.2. Однородные уравнения

Функция $f(x, y)$ называется однородной функцией n -го измерения относительно переменных x и y , если при любом допустимом t справедливо тождество

$$f(tx, ty) \equiv t^n f(x, y).$$

Дифференциальное уравнение первого порядка $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ называется однородным относительно x и y , если функция $f(x, y)$ есть однородная функция нулевого измерения относительно переменных x и y . Такое уравнение всегда можно представить в виде

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Однородные уравнения сводятся к уравнениям с разделением переменных подстановкой $z(x) = \frac{y}{x}$ или $y = z \cdot x$, откуда $y' = z'x + z$.

Пример 1. Решить ДУ

$$2xydx + (x^2 + 3y^2) dy = 0 .$$

Решение. Для определения типа ДУ разрешим уравнение относительно y' и поделим числитель и знаменатель получившейся дроби на x^2 :

$$y' = -\frac{2xy}{x^2 + 3y^2} \Rightarrow y' = -\frac{2\frac{y}{x}}{1 + 3\left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Теперь понятно, что ДУ однородное. Сделаем замену $\frac{y}{x} = z(x)$. Получим $y = xz$ и $y' = z'x + z$. После подстановки в уравнение получим ДУ с разделяющимися переменными:

$$z + xz' = -\frac{2z}{1 + 3z^2} \Rightarrow x \frac{dz}{dx} = -\frac{3(z + z^3)}{1 + 3z^2}.$$

Разделяя переменные при $z \neq 0$, получим:

$$\frac{(1 + 3z^2) dz}{(z + z^3)} = -\frac{3dx}{x} \Rightarrow \int \frac{d(z + z^3)}{z + z^3} = \int -3d \ln |x|.$$

Откуда

$$\ln |z + z^3| = \ln \frac{1}{|x|^3} + \ln |C| \Rightarrow z + z^3 = \frac{C}{x^3}.$$

При этом модули имеем право убрать, так как C любого знака. Кроме того, решение $z = 0$, потерянное при разделении переменных, входит в общее решение для $C = 0$. После обратной замены получим

$$x^3 \left(\frac{y}{x} + \frac{y^3}{x^3} \right) = C.$$

Таким образом, общий интеграл ДУ: $x^2y + y^3 = C$.

Пример 2. Решить ДУ $(y^4 - 2x^3y) dx + (x^4 - 2xy^3) dy = 0$.

Решение. Разрешим уравнение относительно производной:

$$y' = -\frac{y^4 - 2x^3y}{x^4 - 2xy^3} \text{ при условии } x^4 - 2xy^3 \neq 0.$$

В данном случае

$$f(x, y) = -\frac{y^4 - 2x^3y}{x^4 - 2xy^3},$$

тогда

$$f(tx, ty) = -\frac{t^4y^4 - 2t^3x^3ty}{t^4x^4 - 2txt^3y^3} = -\frac{y^4 - 2x^3y}{x^4 - 2xy^3} = f(x, y).$$

Таким образом, данное уравнение – однородное. Используем подстановку $y = ux$, тогда $y' = u + xu'$. После деления числителя и знаменателя на $x^4 \neq 0$

уравнение принимает вид

$$xu' + u = -\frac{u^4 - 2u}{1 - 2u^3}.$$

Разделяем переменные при условиях $x \neq 0$, $u(u^3 + 1) \neq 0$ и интегрируем (используя разложение дробей в сумму простейших):

$$\frac{dx}{x} = \frac{1 - 2u^3}{u^4 + u} du \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{3u^2}{u^3 + 1} \right) du \Rightarrow \ln|x| = \ln \left| \frac{u}{u^3 + 1} \right| + \ln C.$$

Откуда находим общий интеграл:

$$x(u^3 + 1) = Cu.$$

Подставляя в полученное выражение $u = \frac{y}{x}$, приходим к общему интегралу исходного уравнения:

$$x^3 + y^3 = Cx^2y.$$

При решении уравнения мы полагали, что

$$x \neq 0, \quad u \neq 0, \quad u^3 + 1 \neq 0, \quad x^4 - 2xy^3 \neq 0.$$

Таким образом, возможные потерянные решения:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y = -x, \quad y = 2^{-\frac{1}{3}}x.$$

Можно показать, что эти решения содержатся в общем интеграле. Так, если $C = 0$, то получим $y = -x$, если $C = 3 \cdot 2^{-\frac{2}{3}}$, получим $y = 2^{-\frac{1}{3}}x$. Если же $C = \infty$ (рассматривать значение параметра, равное бесконечности, возможно, так как введение нового параметра, например $C_1 = C^{-1}$, сводит этот случай к конечному $C_1 = 0$), то $x^2y = 0$, следовательно, либо $x = 0$, либо $y = 0$.

1.1.3. Линейные уравнения и уравнения Бернулли

Линейным называется уравнение, в которое искомая функция y и ее производная y' входят л и н е й н о. Его общий вид:

$$y' + P(x)y = Q(x). \quad (1.8)$$

Уравнение Бернулли имеет вид:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha \quad (\alpha \neq 0, \alpha \neq 1). \quad (1.9)$$

При $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ это уравнение л и н е й н о.

Уравнения обоих типов можно решить одним методом — подстановкой Бернулли: $y = uv$, где $u(x)$ и $v(x)$ — две неизвестные функции. После замены уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными:

$$\begin{cases} v' + P(x)v = 0, \\ u'v = Q(x)(uv)^\alpha. \end{cases}$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

Решение. Будем искать решение $y(x)$ данного линейного уравнения в виде

$$y(x) = u(x)v(x).$$

Подставляя в исходное уравнение, получим

$$u'v + uv' + 2xuv = xe^{-x^2}$$

или

$$u'v + (v' + 2xv)u = xe^{-x^2}. \quad (1.10)$$

Определим функцию $v(x)$ как решение уравнения $v' + 2xv = 0$. Разделяя переменные, найдем

$$\frac{dv}{v} = -2x dx \Rightarrow \ln |v| = -x^2 + \ln |C| \Rightarrow v = Ce^{-x^2}.$$

Выберем любое частное решение, например, отвечающее $C = 1$. Тогда, подставляя $v = e^{-x^2}$ в уравнение (1.10), получим

$$e^{-x^2} u' = xe^{-x^2}.$$

Откуда $u' = x$, $u = \frac{x^2}{2} + C$. Общее решение исходного уравнения

$$y(x) = u(x)v(x) = \left(\frac{x^2}{2} + C\right) e^{-x^2}.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$(1 - 2xy) y' = y(y - 1).$$

Решение. Разделим данное уравнение на $\frac{dy}{dx}$, тогда получим новое уравнение относительно $x(y)$:

$$y(y - 1) \frac{dx}{dy} = 1 - 2xy,$$

или, в предположении, что $y \neq 0$, $y \neq 1$,

$$\frac{dx}{dy} + \frac{2y}{y(y-1)}x = \frac{1}{y(y-1)}$$

линейное ДУ первого порядка относительно $x(y)$. Заметим здесь, что $y = 0$ и $y = 1$ — решения первоначального ДУ. Делаем подстановку:

$$x(y) = u(y)v(y).$$

Уравнение приобретает вид

$$u'v + uv' + \frac{2y}{y(y-1)}uv = \frac{1}{y(y-1)}.$$

Вынесем u за скобки, тогда

$$u'v + u \left(v' + \frac{2}{y-1}v \right) = \frac{1}{y(y-1)}. \quad (1.11)$$

Находим $v(x)$ как решение уравнения $v' + \frac{2}{y-1}v = 0$. Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{2}{y-1}dy, \quad \ln v = -2 \ln |y-1| + \ln C.$$

Потенцируя полученное выражение, будем иметь

$$v = \frac{C}{(y-1)^2}.$$

Выбираем $C = 1$, подставляем $v = \frac{1}{(y-1)^2}$ в уравнение (1.11). Отсюда

$$\frac{u'}{(y-1)^2} = \frac{1}{y(y-1)}.$$

Разделяем переменные и интегрируем: $du = \frac{y-1}{y}dy$, $u = y - \ln y + C$. Таким образом, общий интеграл исходного уравнения будет иметь вид (с учетом потерянных решений):

$$x = uv = \frac{y - \ln y + C}{(y-1)^2}, \quad y = 0, \quad y = 1.$$

Пример 3. Найти решение уравнения Бернулли

$$y' - y \operatorname{tg} x = -y^2 \cos x.$$

Решение. Подставляя

$$y(x) = u(x)v(x)$$

в исходное уравнение, получим

$$u'v + uv' - uv \operatorname{tg} x = -u^2v^2 \cos x, \quad u'v + (v' - v \operatorname{tg} x)u = -u^2v^2 \cos x.$$

Выберем в качестве $v(x)$ какое-нибудь ненулевое решение уравнения

$$v' - v \operatorname{tg} x = 0.$$

Запишем ДУ в виде

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\sin x}{\cos x}v.$$

Разделим переменные и проинтегрируем

$$\frac{dv}{v} = \frac{\sin x}{\cos x}dx \Rightarrow \ln |v| = -\ln |\cos x| + \ln C \Rightarrow v = \frac{C}{\cos x}.$$

Поскольку нас интересует любое частное решение, положим $C = 1$, т.е. возьмем $v = \frac{1}{\cos x}$. Тогда для $u(x)$:

$$u'v = -u^2v^2 \cos x, \quad \frac{u'}{\cos x} = -u^2 \frac{\cos x}{\cos^2 x}.$$

Получим уравнение $u' = -u^2$. Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{du}{u^2} = -dx \Rightarrow \frac{1}{u} = x + C \Rightarrow u(x) = \frac{1}{x + C}.$$

Общее решение исходного уравнения определится формулой

$$y(x) = uv = \frac{1}{(x + C) \cos x}.$$

1.1.4. Уравнения в полных дифференциалах

ДУ в полных дифференциалах записывается в виде

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0, \quad (1.12)$$

причем левая часть является полным дифференциалом dF от некоторой функции $F(x, y)$. Если нам эта функция известна, то уравнение (1.12) решается мгновенно: $dF(x, y) = 0 \Rightarrow F(x, y) = C$, где $C = \text{const}$. Из курса математического анализа известно, что полный дифференциал функции двух переменных есть выражение вида

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = dF(x, y). \quad (1.13)$$

Кроме того, смешанные производные второго порядка функции двух переменных равны, если они непрерывны, то есть:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}. \quad (1.14)$$

Таким образом, сравнивая формулы (1.12) и (1.13), мы видим, что для ДУ в полных дифференциалах функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ должны быть частными производными некоторой функции $F(x, y)$. Но это возможно, если (в силу формулы (1.14))

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \quad (1.15)$$

Мы получили необходимый и достаточный признак ДУ в полных дифференциалах (1.15).

★ Для решения ДУ в полных дифференциалах нужно восстановить функцию $F(x, y)$ по ее первым производным (см. (1.12) и (1.13)):

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y). \end{cases}$$

Поскольку $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y)$, следовательно,

$$F(x, y) = \int M(x, y) dx + \varphi(y). \quad (1.16)$$

Поясним, что при вычислении интеграла $\int M(x, y) dx$ величина y рассматривается как постоянная, поэтому к интегралу прибавляется не константа, а произвольная функция $\varphi(y)$. Чтобы найти функцию $\varphi(y)$, подставим $F(x, y)$ из (1.16) в уравнение $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x, y) dx \right) + \varphi'(y) = N(x, y).$$

Из этого уравнения определяем $\varphi'(y)$ и, интегрируя, находим $\varphi(y)$.

Пример 1. Проверить, что уравнение

$$e^{-y} dx - (2y + xe^{-y}) dy = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах, и проинтегрировать его.

Решение. В данном случае

$$M = e^{-y}, \quad N = -(2y + xe^{-y}); \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -e^{-y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -e^{-y}.$$

Видим, что

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Следовательно, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Теперь находим F . Поскольку

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) = e^{-y} \\ \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y) = -(2y + xe^{-y}), \end{cases} \quad (1.17)$$

то функцию $F(x, y)$ сначала ищем, интегрируя первое из равенств (1.17):

$$F = \int M(x, y) dx = \int e^{-y} dx, \quad F(x, y) = xe^{-y} + \varphi(y),$$

$\varphi(y)$ — константа интегрирования, которая не зависит от переменной интегрирования x , но может зависеть от y . Затем находим функцию $\varphi(y)$. Для этого $F(x, y) = xe^{-y} + \varphi(y)$ подставим во второе равенство (1.17), то есть продифференцируем по y и приравняем к $N = -2y - xe^{-y}$:

$$-xe^{-y} + \varphi'(y) = -2y - xe^{-y}.$$

Получили ДУ для нахождения $\varphi(y)$: $\varphi'(y) = -2y$. Откуда

$$\varphi(y) = -y^2 + C_1, \quad C_1 = \text{const}.$$

Подставив $\varphi(y)$ в выражение для $F(x, y)$, найдем

$$F(x, y) = xe^{-y} - y^2 + C_1.$$

Таким образом, $xe^{-y} - y^2 + C_1 = C_2$ или $xe^{-y} - y^2 = C$ — общий интеграл исходного уравнения.

Пример 2. Найти общий интеграл уравнения

$$2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y) dy = 0.$$

Решение. В данном случае

$$M = 2x \cos^2 y, \quad N = 2y - x^2 \sin 2y; \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -2x \sin 2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2x \sin 2y.$$

Очевидно, что $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$. Следовательно, данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах. Теперь из системы

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x \cos^2 y \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y - x^2 \sin 2y \end{cases}$$

постепенно восстанавливаем $F(x, y)$. Для этого интегрируем первое равенство по x :

$$F = \int 2x \cos^2 y dx, \quad F(x, y) = x^2 \cos^2 y + \varphi(y).$$

Подставляем $F(x, y)$ во второе равенство, находя $\frac{\partial F}{\partial y}$ от функции

$$F(x, y) = x^2 \cos^2 y + \varphi(y),$$

и приравнявая $\frac{\partial F}{\partial y}$ к функции $N = 2y - x^2 \sin 2y$, получаем

$$-x^2 \sin 2y + \varphi'(y) = 2y - x^2 \sin 2y, \quad \Rightarrow \quad \varphi'(y) = 2y$$

и, следовательно, $\varphi(y) = y^2 + C$, $C = \text{const}$. Подставив найденное выражение для $\varphi(y)$ в выражение для $F(x, y)$, найдем

$$F(x, y) = x^2 \cos^2 y + y^2 + C.$$

Таким образом, $x^2 \cos^2 y + y^2 = C$ — общий интеграл исходного уравнения.

1.1.5. Задачи для самостоятельного решения

1. $y' \cos x = \frac{y}{\ln y}$, $y(0) = 1$. (Ответ: $\frac{1}{2} \ln^2 y = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$.)
2. $(1 + x^2) dy + y dx = 0$, $y(1) = 1$. (Ответ: $y = \exp \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x \right)$.)
3. В комнате, где температура 20^0 , некоторое тело остыло за 20 мин от 100 до 60^0 . Найти закон охлаждения тела. Повышением температуры в комнате пренебречь. (Указание: в силу закона Ньютона скорость охлаждения пропорциональна разности температур. (Ответ: $T = 20 + 80 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{20}}$.)
4. $(x^2 + 2xy) dx + xy dy = 0$. (Ответ: $\ln |x + y| + \frac{x}{x+y} = C$.)
5. $xyy' = y^2 + 2x^2$. (Ответ: $y^2 = 4x^2 \ln Cx$.)
6. $y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$; $y(0) = 0$. (Ответ: $y = \operatorname{tg} x - 1 + e^{-\operatorname{tg} x}$.)
7. $(y^4 + 2x) y' = y$. (Ответ: $x = Cy^2 + \frac{y^4}{2}$.)
8. $(x^2 \ln y - x) y' = y$. (Ответ: $x = \frac{1}{\ln y + 1 - Cy}$.)
9. $(x + \sin y) dx + (x \cos y + \sin y) dy$. (Ответ: $\frac{1}{2} x^2 + x \sin x - \cos y = C$.)
10. $(y + x \ln y) dx + \left(\frac{x^2}{2y} + x + 1 \right) dy = 0$. (Ответ: $x^2 \ln y + 2y(x + 1) = C$.)

1.2. Дифференциальные уравнения высших порядков.

Иногда ДУ n -го порядка $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ подходящей подстановкой удастся свести к уравнению низшего порядка (в благоприятном случае — первого порядка, т.е. к уже рассмотренной ранее задаче).

1.2.1. Уравнения вида $\frac{d^n}{dx^n}y(x) = f(x)$

★ Учитывая, что $y^n = (y^{n-1})'$, получим $y^{(n-1)} = \int f(x)dx$. Продолжая последовательно интегрировать, восстановим функцию $y(x)$ (с точностью до n произвольных постоянных).

Пример 1. Найти частное решение уравнения $y''' = x \sin x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$.

Решение. Найдем общее решение последовательным интегрированием данного уравнения:

$$y'' = \int x \sin x dx = \sin x - x \cos x + C_1,$$

$$y' = \int (\sin x - x \cos x + C_1) dx = -2 \cos x - x \sin x + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int (-2 \cos x - x \sin x + C_1 x + C_2) dx = -3 \sin x + x \cos x + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

Воспользуемся начальными условиями:

$$y''(0) = 2 \Rightarrow 0 + C_1 = 2 \Rightarrow C_1 = 2,$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow -2 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 2,$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 + C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = 0.$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид:

$$y = -3 \sin x + x \cos x + x^2 + 2x.$$

Пример 2. Найти общий интеграл уравнения $y'' = \sin(kx)$ и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 1$.

Решение. Последовательное интегрирование дает:

$$y' = \int \sin kx dx = -\frac{1}{k} \cos kx + C_1,$$

$$y = \int \left(-\frac{1}{k} \cos kx + C_1 \right) dx = -\int \frac{1}{k} \cos kx dx + \int C_1 dx = -\frac{1}{k^2} \sin kx + C_1 x + C_2.$$

Общее решение:

$$y = -\frac{1}{k^2} \sin kx + C_1 x + C_2.$$

Из условия $y|_{x=0} = 0$ находим $C_2 = 0$. Из условия $y|_{x=0} = 1$ находим:
 $1 = -\frac{1}{k} + C_1 \Rightarrow C_1 = 1 + \frac{1}{k}$. Таким образом, частное решение имеет вид:

$$y = -\frac{\sin kx}{k^2} + x \left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

1.2.2. Уравнения, не содержащие искомую функцию

I. Уравнение второго порядка вида $F(x, y', y'') = 0$ решается заменой $y' = p(x), y'' = p'(x)$, которая понизит порядок уравнения до первого.

II. Уравнение произвольного порядка $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$, в которое не входит искомая функция (и, возможно, также ее производные до некоторого порядка), решается с помощью замены $y^{(k)} = p(x)$ (за новую функцию берем низшую из производных, входящих в ДУ). Тогда $y^{(k+1)} = p'(x), \dots, y^{(n)} = p^{(n-k)}(x)$. Порядок уравнения понизится на k единиц.

Пример 1. Проинтегрировать уравнение второго порядка

$$(1+x)y'' + y' = 0.$$

Решение. Принимая y' за неизвестную функцию $p(x)$ и учитывая, что $y'' = p'$, перепишем уравнение в виде

$$(1+x) \frac{dp}{dx} + p = 0.$$

Это — уравнение первого порядка (с неизвестной функцией $p(x)$). Домножив на dx , получим уравнение

$$(1+x)dp + pd(x+1) = 0 \Rightarrow d(p(x+1)) = 0,$$

так что общий интеграл уравнения есть

$$(1+x)p = C_1.$$

Теперь вернемся к прежней неизвестной функции $y(x)$ и запишем последнее уравнение так:

$$(1+x) \frac{dy}{dx} = C_1 \quad \text{или} \quad y = \frac{C_1 dx}{x+1}.$$

Интегрируя уравнение, находим:

$$y = C_1 \ln(1+x) + C_2.$$

Получено общее решение исходного уравнения.

Пример 2. Найти общий интеграл уравнения $xy''' + y'' - x - 1 = 0$.

Решение. В уравнении явно не содержатся функции y и y' . Сделаем замену $y'' = p(x)$, $y''' = \frac{dp}{dx}$. Подстановка приводит к линейному уравнению:

$$p' + \frac{p}{x} = \frac{1}{x} + 1.$$

Решение ищем в виде $p = uv$, в частности $p' = u'v + v'u$. Проводим решение линейного уравнения методом Бернулли (см. С.8):

$$u'v + v'u + \frac{uv}{x} = \frac{1}{x} + 1, \quad u \left(v' + \frac{v}{x} \right) + u'v = \frac{1+x}{x},$$

$$v' + \frac{v}{x} = 0, \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},$$

$$\ln |v| = -\ln |x| + \ln C, \quad C = 1 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{x},$$

$$u'v = \frac{1+x}{x}, \quad u' \frac{1}{x} = \frac{1+x}{x}, \quad u' = 1+x,$$

$$du = (1+x) dx, \quad u = \frac{x^2}{2} + x + C_1$$

$$p = uv, \quad p = \left(\frac{x^2}{2} + x + C_1 \right) \frac{1}{x}, \quad p = \frac{x}{2} + 1 + \frac{C_1}{x}.$$

Теперь сделаем обратную замену $p = y''$:

$$y'' = \frac{x}{2} + 1 + \frac{C_1}{x}.$$

Из полученного ДУ второго порядка последовательным интегрированием восстанавливаем $y(x)$:

$$y' = \int \left(\frac{x}{2} + 1 + \frac{C_1}{x} \right) dx = \frac{x^2}{4} + x + C_1 \ln |x| + C_2,$$

$$y = \int \left(\frac{x^2}{4} + x + C_1 \ln |x| + C_2 \right) dx = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + C_1 x (\ln x - 1) + C_2 x + C_3.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения

$$y = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + C_1 x (\ln x - 1) + C_2 x + C_3.$$

1.2.3. Уравнения, не содержащие свободную переменную x

I. Уравнение второго порядка вида $F(y, y', y'') = 0$ решается заменой $y' = p(y)$, $y'' = p'_y y'_x = p'p$, которая понизит порядок уравнения до первого. (Здесь вычислена вторая производная $y''(x)$ как производная сложной функции $p(y(x))$.)

II. В общем случае уравнение вида $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, в которое не входит явно независимая переменная, решается той же заменой $y' = p(y)$, понижающей порядок на единицу. При этом учитываем, что $y'' = p'_y p$, $y''' = p(p'_y)^2 + p^2 p''_{yy}$, и т.д. Формулы получены дифференцированием сложной функции $p(y(x))$:

$$y'' = \frac{d}{dx} y' = \frac{d}{dx} p(y) = \frac{dp}{dy} \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{=p(y)} = p \frac{dp}{dy}. \quad (1.18)$$

Пример 1. Найти общий интеграл уравнения $y'^2 + 2yy'' = 0$.

Решение. Уравнение второго порядка не содержит независимую переменную x и рекомендованная подстановка $y' = p(y)$, $y'' = p \frac{dp}{dy}$ приводит к уравнению первого порядка:

$$p^2 + 2y \frac{dp}{dy} p = 0 \quad \text{или} \quad p(p + 2y \frac{dp}{dy}) = 0.$$

Поскольку произведение равно нулю, если один из сомножителей равен нулю, полученное ДУ эквивалентно совокупности двух ДУ:

$$\begin{cases} p = \frac{dy}{dx} = 0; \\ p + 2y \frac{dp}{dy} = 0. \end{cases}$$

Решение первого $y = const$, а второе интегрируем как уравнение с разделяющимися переменными:

$$2y \frac{dp}{dy} = -p, \quad \frac{dp}{p} = -\frac{dy}{2y}, \quad \ln |p| = -\frac{1}{2} \ln |y| + \ln C_1, \quad p = C_1 y^{-\frac{1}{2}}.$$

Проводим обратную замену $p = y'(x)$ и решаем полученное ДУ с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y^{-\frac{1}{2}}; \quad y^{-\frac{1}{2}} dy = C_1 dx; \quad \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = C_1 x + C_2.$$

Общее решение исходного уравнения:

$$\begin{cases} \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = C_1 x + C_2 \\ y = C_3 \end{cases}.$$

Пример 2. Решить ДУ $y'' = \frac{(y')^2}{y}$.

Решение. Пусть $y' = p(y)$, тогда $y'' = p \frac{dp}{dy}$. После подстановки получим

$$p \frac{dp}{dy} = \frac{p^2}{y} \quad \text{или} \quad p \left(\frac{dp}{dy} - \frac{p}{y} \right) = 0.$$

Это уравнение равносильно совокупности ДУ

$$\begin{cases} p = \frac{dy}{dx} = 0, \\ \frac{dp}{dy} = \frac{p}{y}. \end{cases}$$

Решением первого уравнения совокупности является $y = C_1$. Найдем решение второго:

$$\frac{dp}{dy} = \frac{p}{y}, \quad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}, \quad \ln |p| = \ln |y| + \ln C_2 \quad (C_2 \neq 0).$$

Делаем обратную замену

$$p = \frac{dy}{dx} = C_2 y, \quad dy = C_2 y dx, \quad \frac{dy}{y} C_2 dx, \quad \ln y = C_2 x + \ln C_3 \quad (C_3 \neq 0).$$

Таким образом,

$$\begin{cases} y_1 = C_1 \\ y_2 = C_3 e^{C_2 x}. \end{cases}$$

Осталось заметить, что частное решение $y_1 = C_1$ содержится в семействе функций $y_2 = C_3 e^{C_2 x}$ при $C_2 = 0$, то есть общее решение $y = C e^{C_1 x}$.

1.2.4. Однородные уравнения высших порядков

I. Уравнение второго порядка $F(x, y, y', y'') = 0$ называется *однородным по группе переменных* y, y', y'' (сравните с определением однородной функции на С.6), если

$$F(x, ty, ty', ty'') = t^k F(x, y, y', y'').$$

Подстановкой $\frac{y'}{y} = z(x)$ порядок такого уравнения понижается на единицу, при этом $y'' = (yz)' = y'z + yz' = (yz)z + yz' = y(z^2 + z')$.

II. Уравнение вида $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ называется *однородным по группе переменных* $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$, если

$$F(x, ty, ty', ty'', \dots, ty^{(n)}) = t^k F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}).$$

Подстановка, понижающая порядок $\frac{y'}{y} = z(x)$, при этом

$$y' = yz, \quad y'' = y(z^2 + z'), \quad y''' = y(z^3 + 3zz' + z'') \quad \text{и т.д.}$$

Пример 1. Найти общее решение ДУ

$$xyy'' - xy'^2 - yy' = 0.$$

Решение. Прежде убедимся, что уравнение является однородным по группе переменных y, y', y'' :

$$F(ty, ty', ty'') = xtyty'' - x(ty')^2 - tyty' = t^2(xyy'' - xy'^2 - yy').$$

Проведем замену:

$$y' = yz(x), \quad y'' = y(z^2 + z'), \quad \text{тогда}$$

$$xy^2(z^2 + z') - xy^2z^2 - y^2z = 0 \Leftrightarrow y^2(xz' - z) = 0.$$

Получили ДУ первого порядка, эквивалентное совокупности уравнений

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = C_1x \end{cases}.$$

Во втором уравнении делаем обратную замену $\frac{y'}{y} = z(x) = C_1x$. Затем интегрируем полученное ДУ с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{y} = C_1x dx \Rightarrow \ln|y| = \frac{C_1x^2}{2} + \ln|C_2| \Rightarrow y = C_2e^{\overline{C_1}x^2}, \quad \overline{C_1} = \frac{C_1}{2}.$$

Получено общее решение $y = C_2e^{\overline{C_1}x^2}$, которое содержит частное решение $y = 0$.

Пример 2. Решить ДУ

$$y - xy' = x\sqrt{yy''}.$$

Решение. Докажем, что уравнение является однородным по группе переменных y, y', y'' :

$$F(ty, ty', ty'') = ty - xty' - x\sqrt{tyty''} = t(y - xy' - x\sqrt{yy''}) = tF(y, y', y''), \quad (t > 0).$$

Проводим замену

$$y' = yz(x), \quad y'' = y(z^2 + z'), \quad \text{тогда}$$

$$y - xyz = x\sqrt{yy(z^2 + z')} \Leftrightarrow y(1 - xz - x\sqrt{(z^2 + z')}) = 0, \quad (y \geq 0).$$

Получим совокупность уравнений:

$$\begin{cases} y = 0 \\ 1 - xz - x\sqrt{(z^2 + z')} = 0 \end{cases}.$$

Возводя второе ДУ в квадрат, получаем линейное уравнение первого порядка (см. С.8), решаемое заменой $z = uv, z' = u'v + v'u$:

$$(1 - xz)^2 = x^2(z^2 + z') \Leftrightarrow x^2z' + 2xz - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2(u'v + v'u) + 2xuv - 1 = 0,$$

$$\begin{cases} x^2 u' + 2xu = 0 \\ x^2 v'u - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x^{-2} \\ v = C_1 \end{cases} \Rightarrow z = C_1 x^{-2}.$$

Сделаем обратную замену:

$$\frac{y'}{y} = C_1 x^{-2} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{C_1 dx}{x^2} \Leftrightarrow y = C_2 e^{\overline{C}_1/x}, \quad \overline{C}_1 = -C_1.$$

Уравнение решено (учтено и частное решение $y = 0$).

1.2.5. Выделение полной производной в ДУ высших порядков

Если ДУ может быть представлено в виде полной производной некоторой функции $G(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$, то есть

$$\frac{d}{dx} G(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = 0,$$

тогда интегрированием этого равенства по x порядок ДУ может быть понижен на единицу:

$$G(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = C_1.$$

★ Заметим, что нет (и не может быть) единого алгоритма выделения полной производной. Можно лишь увидеть в ДУ производные известных функций. При этом, рекомендуем принять к сведению следующие формулы (здесь $y = y(x)$):

$$(yy')' = y'^2 + yy'', \quad \left(\frac{y'}{y}\right)' = \frac{y''y - y'^2}{y^2}, \quad (y'^2)' = 2y'y'' \text{ и т.п.}$$

Пример. Выделить полные производные и понизить порядок следующих ДУ:

$$1) y'^2 + yy'' + y' = x^2; \quad 2) y''y - y'^2 = y^2(x - 2); \quad 3) \frac{y + xy'}{x + y'y''} = 2.$$

Решение. 1). Заметим, что $(yy' + y)' = y'^2 + yy'' + y'$ и $(\frac{1}{3} x^3)' = x^2$, то есть:

$$(yy' + y)' = \left(\frac{1}{3} x^3\right)' \Rightarrow yy' + y' = \frac{1}{3} x^3 + C_1.$$

Таким образом, выделение полной производной позволило понизить порядок уравнения на единицу.

2). Второе уравнение можно классифицировать как однородное по группе переменных y, y', y'' и решить соответствующей заменой (см. С.19). Однако,

если поделить обе части равенства на y^2 , при условии $y \neq 0$, то легко можно выделить полные производные:

$$\left[\begin{array}{l} y = 0 \\ \left(\frac{y'}{y}\right)' = \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)' \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ \frac{y'}{y} = \frac{1}{2}x^2 - 2x + C_1 \end{array} \right].$$

3). Данное уравнение домножим на знаменатель и выделим полные производные:

$$\frac{y + xy'}{x + y'y''} = 2 \Leftrightarrow (xy)' = (x^2 + y'^2)' \Leftrightarrow xy = x^2 + y'^2 + C_1.$$

Выделение полной производной позволяет один раз проинтегрировать ДУ и понизить его порядок на единицу.

1.2.6. Задачи для самостоятельного решения

1. $y''' = \frac{1}{x}$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$, $y''(1) = -2$.

(Ответ: $y = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{7}{4}x^2 + 5x - \frac{9}{4}$).

2. $y^{IV} = \sin x$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$; $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = y'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

(Ответ: $y = \sin x + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$).

3. $y''' = 2\frac{\cos x}{\sin^3 x}$.

(Ответ: $y = \ln \sin x + C_1 + C_2x + C_3x^2$).

4. $(1 - x^2)y'' - xy' = 2$.

(Ответ: $y = \arcsin^2 x + C_1 \arcsin x + C_2$).

5. $y'' = 1 + \frac{x(y'-x)}{1-x^2}$, $y(0) = 1$, $y(1) = \frac{1}{2}$.

(Ответ: $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{\pi} \arcsin x + 1$).

6. $y'y'' - \sqrt{1 + y'^2} = 0$.

(Ответ: $y = \frac{x-C_1}{2} \sqrt{(x-C_1)^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln \left[(x-C_1) + \sqrt{(x-C_1)^2 - 1} \right] + C_2$).

7. $y'^2 + 2yy' = 0$. (Ответ: $\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = C_1x + C_2$).

8. $y'' = \frac{1}{a}(1 + y'^2)$, $y(0) = y'(0) = 0$. (Ответ: $y = -a \ln \cos \frac{x}{a}$).

1.3. Линейные дифференциальные уравнения

Линейным дифференциальным уравнением (ЛДУ) n -го порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции $y(x)$ и ее производных. Такое уравнение всегда можно записать в виде:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x). \quad (1.19)$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что функции $p_1(x), \dots, p_n(x), f(x)$ непрерывны. Если правая часть $f(x) \equiv 0$, то уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (1.20)$$

называется *линейным однородным*.

Отметим основные результаты теории линейных дифференциальных уравнений.

Теорема 1.1 (о структуре общего решения ОЛДУ)

Общим решением однородного линейного ДУ n -го порядка (1.20) является линейная комбинация $\sum_{i=1}^n C_i y_i$ линейно независимых на $[a, b]$ решений $y_1(x), \dots, y_n(x)$ данного ОЛДУ.

Любая система из n линейно независимых частных решений ОЛДУ n -го порядка называется его фундаментальной системой решений (ФСР).

Теорема 1.2 (об общем решении НЛДУ)

Общее решение НЛДУ (1.19) порядка n есть сумма общего решения \bar{y} соответствующего однородного уравнения (1.20) и какого-нибудь частного решения \tilde{y} неоднородного уравнения (1.19).

Теорема 1.3 (принцип суперпозиции)

Пусть имеется НЛДУ

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = \sum_{i=1}^m f_i.$$

Тогда частное решение y этого уравнения есть сумма $y = \sum_{i=1}^m y_i$, где каждое y_i — решение соответствующего уравнения $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f_i, \quad 1 \leq i \leq m.$

★ Алгоритм решения произвольного НЛДУ состоит из трех частей:

- 1) решить каким-нибудь способом соответствующее ОЛДУ (понизить степень ДУ или найти ФСР);
- 2) найти частное решение НЛДУ (подбором или методом вариации постоянных);
- 3) записать общее решение НЛДУ (теорема 1.2).

1.3.1. ЛДУ с переменными коэффициентами

★ Для ЛДУ с переменными коэффициентами (т.е. коэффициенты зависят от x) нет общего алгоритма решения ОЛДУ. Однако, это всегда однородное по группе переменных $y, y', \dots, y^{(n)}$ ДУ, для которого есть замена, понижающая порядок (см. С.19). Есть и другие способы решения. Проиллюстрируем их на примере.

Пример. Решить ЛДУ $(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 2$.

Решение. Реализуем алгоритм решения НЛДУ по пунктам.

1). Рассмотрим ОЛДУ $(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$.

1-й способ. Проведем рекомендованную на С.19 для однородных уравнений замену $y' = uy$, $y'' = u'y + u^2y$. При этом получим:

$(x^2 + 1)u' - 2xu + 2 + (x^2 + 1)u^2 = 0$ — ДУ первого порядка, но классифицировать его по таблице простейших ДУ первого порядка приложения (см. С.71) нельзя.

2-й способ. Попробуем подобрать какое-либо частное решение ОЛДУ среди простейших многочленов. Легко проверить, что частным решением является, например, функция $y = x$. Тогда проведем замену $y = xz(x)$. Относительно новой искомой функции $z(x)$ получим ДУ 2-го порядка $x(x^2 + 1)z'' + 2z' = 0$, допускающее понижение порядка, так как не содержит z (см. С.16 и приложения С.72). Замена, понижающая порядок $z' = u$, $z'' = u'$, приводит к ДУ с разделяющимися переменными $x(x^2 + 1)u' + 2u = 0$. Его общее решение имеет вид $u = C_1 \frac{x^2 + 1}{x^2}$. Отсюда восстанавливаем z :

$$z(x) = \int C_1 \frac{x^2 + 1}{x^2} dx = C_1 \left(x - \frac{1}{x} \right) + C_2.$$

А так как $y = xz$, то общее решение исходного ОЛДУ

$$y = C_1(x^2 - 1) + C_2x.$$

★ Итак, если известно частное решение ОДЛУ $y = y_1(x)$, то порядок ДУ может быть понижен на единицу заменой $y = y_1(x)z(x)$.

3-й способ. Здесь мы не будем пытаться понизить порядок ДУ, а воспользуемся теоремой 1.1, которая утверждает, что для решения ОЛДУ достаточно найти ФСР. Один элемент ФСР мы уже подобрали — это $y_1(x) = x$ (см. 2-й способ). Продолжим подбор частных решений среди многочленов второго порядка. Несложно проверить, что ОЛДУ удовлетворяет $y_2(x) = x^2 - 1$. Система функций $y_1(x), y_2(x)$ линейно независима. Действительно, вычислим определитель

Далее, в общем решении ОЛДУ варьируем постоянные C_1, C_2 , то есть решение ищем в виде $y = C_1(x)(x^2 - 1) + C_2(x)x$. Составляем систему (1.21) для нахождения C_1', C_2' . Общий вид этой системы для случая $n = 2$:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases}$$

В нашем случае $y_1(x) = x^2 - 1, y_2(x) = x, f(x) = \frac{2}{x^2+1}$, поэтому система имеет вид:

$$\begin{cases} C_1'(x)(x^2 - 1) + C_2'(x)x = 0, \\ C_1'(x)2x + C_2'(x) = \frac{2}{x^2+1}. \end{cases}$$

Решение системы можно провести методом исключения. В итоге получим:

$$\begin{cases} C_1'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}, \\ C_2'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}. \end{cases}$$

Находим функции по производным:

$$C_1(x) = \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx = -\frac{1}{x^2+1} + D_1, \quad C_2(x) = \int \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} dx = \frac{2x}{x^2+1} + D_2.$$

Здесь D_1, D_2 — произвольные постоянные. Теперь подставляем функции $C_1(x), C_2(x)$ в общее решение ОЛДУ:

$$y = \left(-\frac{1}{x^2+1} + D_1\right)(x^2 - 1) + \left(\frac{2x}{x^2+1} + D_2\right)x.$$

Раскроем скобки и упростим. В результате общее решение НЛДУ:

$$y = D_1(x^2 - 1) + D_2x + 1.$$

1.3.3. ОЛДУ с постоянными коэффициентами

ОЛДУ с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0, \quad (1.22)$$

причем все коэффициенты a_i — вещественные константы.

Частные решения, составляющие ФСР этого уравнения, всегда можно найти по известному алгоритму, сводящему решение ДУ к решению алгебраического уравнения.

★ Для того чтобы решить ОЛДУ n -го порядка (1.22) с постоянными коэффициентами, достаточно найти корни *характеристического уравнения*:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0. \quad (1.23)$$

Для записи характеристического уравнения нужно заменить в ОЛДУ (1.22) каждую производную $y^{(m)}$, $0 \leq m \leq n$, на соответствующую степень $k^{(m)}$. Набору корней $k^{(m)}$, $0 \leq m \leq n$, соответствует набор функций y_m , $0 \leq m \leq n$, образующий ФСР данного ОЛДУ (см., например, приложения С.72). Тогда по теореме 1.1 общее решение ОЛДУ есть линейная комбинация элементов фундаментальной системы: $y = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x)$.

Для случая $n = 2$ характеристическое уравнение будет квадратным:

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0. \quad (1.24)$$

Сведем в таблицу соответствие между корнями уравнения (1.24) и элементами ФСР соответствующего ОЛДУ:

Корни уравнения (1.24)	ФСР ОЛДУ
$k_{1,2}$ — действительные и различные	$y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$
$k_1 = k_2 = \tilde{k}$ — действительные и кратные	$y_1 = e^{\tilde{k} x}$, $y_2 = e^{\tilde{k} x} x$
$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ — комплексные	$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$

Пример 1. Найдите решения ОЛДУ:

1) $y'' - 2y' - 8y = 0$; 2) $y'' - 6y' + 9y = 0$; 3) $y'' - 6y' + 13y = 0$.

Решение.

1). Составим характеристическое уравнение: $k^2 - 2k - 8 = 0$. Решения характеристического уравнения имеют вид: $k_1 = 4$, $k_2 = -2$. Характеристическое уравнение имеет два действительных различных корня. В этом случае ОЛДУ имеет два линейно независимых частных решения $y_1 = e^{4x}$, $y_2 = e^{-2x}$. Общее решение ДУ имеет вид:

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x}.$$

2). Характеристическое уравнение данного ДУ имеет вид: $k^2 - 6k + 9 = 0$. Оно имеет корень $k = k_1 = k_2 = 3$ кратности 2. Тогда ФСР образуют функции:

$y_1 = e^{3x}$, $y_2 = e^{3x}x$. Общее решение ДУ :

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} = (C_1 + C_2 x) e^{3x}.$$

3). Характеристическое уравнение: $k^2 - 6k + 13 = 0$. Решения характеристического уравнения комплексные: $k_{1,2} = 3 \pm 2i$. Тогда частные решения, образующие ФСР, имеют вид: $y_1 = e^{3x} \cos 2x$, $y_2 = e^{3x} \sin 2x$. И общее решение ДУ:

$$y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) e^{3x}.$$

Пример 2. Решите уравнения:

1) $y''' - y = 0$; 2) $y''' + 2y'' - 4y' - 8y = 0$; 3) $y^{IV} + 2y'' + y = 0$.

Решение.

1). Характеристическое уравнение:

$$k^3 - 1 = 0, \quad (k - 1)(k^2 + k + 1) = 0,$$

откуда

$$k_1 = 1, \quad k_{2,3} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Соответствующие этим корням элементы ФСР:

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x, \quad y_3 = e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Общее решение ОЛДУ:

$$y = C_1 e^x + e^{-\frac{1}{2}x} \left[C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right].$$

2). Характеристическое уравнение имеет вид: $k^3 + 2k^2 - 4k - 8 = 0$. Группируя слагаемые, получаем $(k + 2)(k^2 - 4) = 0$, откуда $k_1 = 2$, $k_{2,3} = -2$. Фундаментальная система решений: $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-2x}$, $y_3 = x e^{-2x}$; общее решение: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 x e^{-2x}$.

3). Характеристическое уравнение $k^4 + 2k^2 + 1 = (k^2 + 1)^2 = 0$ имеет двукратные корни $k_{1,2} = i$, $k_{3,4} = -i$. Им соответствует линейно независимая система частных решений:

$$y_1 = e^{0x} \cos x, \quad y_2 = x e^{0x} \cos x, \quad y_3 = e^{0x} \sin x, \quad y_4 = x e^{0x} \sin x.$$

Общее решение ОЛДУ есть их линейная комбинация:

$$y = C_1 \cos x + C_2 x \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \sin x,$$

или

$$y = (C_1 + C_2 x) \cos x + (C_3 + C_4 x) \sin x.$$

1.3.4. НЛДУ с постоянными коэффициентами

Рассмотрим решение НЛДУ с постоянными вещественными коэффициентами a_i :

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x). \quad (1.25)$$

Если известно общее решение соответствующего ОЛДУ \bar{y} , то (по теореме 1.2, С.23) достаточно найти какое-нибудь частное решение НЛДУ \tilde{y} для записи общего решения НЛДУ: $y = \bar{y} + \tilde{y}$. Подобрать частное решение \tilde{y} возможно алгебраически — методом неопределенных коэффициентов, если функция $f(x)$ имеет вид *квазиполинома* — комбинации экспоненты, полиномов, косинусов и синусов:

$$f(x) = e^{\alpha x} \left\{ P_k(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x \right\}, \quad (1.26)$$

где $P_k(x)$ и $Q_n(x)$ — полиномы степени k и n соответственно.

★ Частное решение \tilde{y} НЛДУ (с точностью до неопределенных коэффициентов) подбираем по виду правой части $f(x)$, при этом можно пользоваться таблицей частных решений в приложениях приведенных на С.73. Неопределенные коэффициенты находим подстановкой \tilde{y} в НЛДУ.

Здесь рассмотрим два частных случая для $f(x)$.

I. Если $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ и контрольное число $\mathfrak{r} = \alpha$ есть корень характеристического уравнения кратности s (если $\mathfrak{r} = \alpha$ не корень, то $s = 0$), тогда $\tilde{y} = x^s e^{\alpha x} R_n(x)$. $R_n(x)$ — многочлен с неопределенными коэффициентами степени n .

II. Если $f(x) = e^{\alpha x} (P \cos \beta x + Q \sin \beta x)$ (P, Q — числа) и контрольное число $\mathfrak{r} = \alpha + i\beta$ есть корень характеристического уравнения кратности s (если \mathfrak{r} не корень, то $s = 0$), тогда $\tilde{y} = x^s e^{\alpha x} (R \cos x + T \sin x)$. R и T — неопределенные коэффициенты.

Пример 1. Найти решения НЛДУ:

1) $y'' - 5y' + 6y = e^x$; 2) $y'' = x^2 + y$; 3) $y'' - 4y' + 4y = \cos x$.

Решение. 1). Найдем решение соответствующего ОЛДУ: $y'' - 5y' + 6y = 0$. Выпишем характеристическое уравнение и его корни: $k^2 - 5k + 6 = 0$, $k_1 = 3$, $k_2 = 2$. Значит, общее решение ОЛДУ: $\bar{y} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$.

Теперь методом неопределенных коэффициентов подберем частное решение \tilde{y} НЛДУ. Правая часть $f(x) = e^x$ — квазимногочлен (1.26) вида I (С.29) и его параметры $\alpha = 1$, $P_0(x) = 1$. Тогда контрольное число $\mathfrak{r} = \alpha = 1$. Теперь конструируем \tilde{y} . Так как $\mathfrak{r} = 1$ не корень, то $s = 0$. Многочлен $R_0(x) = A$, где A — неопределенный коэффициент. Итак, $\tilde{y} = Ae^x$. Найдем A подстановкой в

НЛДУ. Функции

$$\tilde{y} = Ae^x, \quad \tilde{y}' = Ae^x, \quad \tilde{y}'' = Ae^x$$

подставляем в уравнение :

$$Ae^x - 5Ae^x + 6Ae^x = e^x \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \tilde{y} = \frac{1}{2}e^x.$$

Окончательно, общее решение НЛДУ

$$y = \bar{y} + \tilde{y} = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}e^x.$$

2). Для ОЛДУ $y' - y = 0$ решаем характеристическое уравнение

$$k^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 1, \quad k_2 = -1$$

и находим общее решение

$$\bar{y} = C_1e^x + C_2e^{-x}.$$

По правой части $f(x) = x^2$ определяем параметры (1.26) типа I (С.29): $\alpha = 0$, $P_2(x) = x^2$. Контрольное число $\mathfrak{r} = \alpha + i\beta = 0$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому $s = 0$, а $R_m(x) = Ax^2 + Bx + C$. Вид частного решения $\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C$. После подстановки \tilde{y} в НЛДУ получим

$$2A - (Ax^2 + Bx + C) = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -A = 1, \\ -B = 0, \\ 2A - C = 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} A = -1 \\ B = 0 \\ C = -2. \end{cases}$$

Таким образом, частное решение НЛДУ $\tilde{y} = -x^2 - 2$, а общее решение

$$y = \bar{y} + \tilde{y} = C_1e^x + C_2e^{-x} - (x^2 + 2).$$

3). Для ОЛДУ $y'' - 4y' + 4y = 0$ решаем характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 4 = 0$, $k_{1,2} = 2$. Общее решение ОЛДУ $\bar{y} = (C_1 + C_2x)e^{2x}$.

По правой части $f(x) = \cos x$ определяем параметры (1.26) типа II (С.29): $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Контрольное число $\mathfrak{r} = \alpha + i\beta = i$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому $s = 0$. Вид частного решения $\tilde{y} = A \cos x + B \sin x$. После подстановки \tilde{y} в НЛДУ получим

$$(-A \cos x - B \sin x) - (-A \sin x + B \cos x) y' + (A \cos x + B \sin x) y = \cos x;$$

$$(-A - 4B + 4A) \cos x + (-B + 4A + 4B) \sin x = \cos x;$$

$$\begin{cases} 3A - 4B = 1 \\ 4A + 3B = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = \frac{3}{25} \\ B = -\frac{4}{25} \end{cases}.$$

Частное решение НЛДУ

$$\tilde{y} = \frac{3}{25} \cos x - \frac{4}{25} \sin x,$$

а общее

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{2x} + \frac{3}{25} \cos x - \frac{4}{25} \sin x.$$

★ Если правая часть НЛДУ есть сумма квазимногочленов, то, пользуясь принципом суперпозиции (теорема 1.3, С.23), находим частное решение \tilde{y} НЛДУ как сумму частных решений, подобранных для каждого квазимногочлена в отдельности.

Пример 2. Определить вид частного решения НЛДУ

$$y''' - y'' + y' - y = 1 + 4xe^x.$$

Решение. Характеристическое уравнение $k^3 - k^2 + k - 1 = 0$ имеет корни $k_1 = 1, k_{2,3} = \pm i$.

В исходном уравнении неоднородность не является единым квазиполиномом (в самом деле, она включает как слагаемое с экспонентой, так и слагаемое без нее, что невозможно в одном квазиполиноме).

В соответствии с принципом суперпозиции (см. С. 23) решим отдельно два НЛДУ:

$$y''' - y'' + y' - y = 1 \quad \text{и} \quad y''' - y'' + y' - y = 4xe^x.$$

Для первого НЛДУ: $f(x) = e^{0x}$ контрольное число $\tau = \alpha + i\beta = 0 \neq k_{1,2,3};$ кратность $s = 0;$ степень полинома $m = 0.$ Частное решение : $\tilde{y}_1 = A.$	Для второго НЛДУ: $f(x) = 4xe^{1x}$ контрольное число $\tau = \alpha + i\beta = 1 = k_1;$ кратность $s = 1 ;$ степень полинома $m = 1.$ Частное решение : $\tilde{y}_2 = e^x(Bx + C)x.$
---	--

Здесь A, B, C — неопределенные коэффициенты, которые можно найти подстановкой \tilde{y}_1 в первое НЛДУ, а \tilde{y}_2 — во второе НЛДУ.

Окончательно, общее решение исходного НЛДУ имеет вид:

$$y(x) = \bar{y} + \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x + A + e^x(Bx^2 + Cx).$$

★ Если правая часть НЛДУ с постоянными коэффициентами не является квазиполиномом, то метод неопределенных коэффициентов не работает, но можно применить метод Лагранжа (см. С.25).

Пример 3. Найдите решение НЛДУ $y''' + y' = \frac{1}{\sin x}.$

Решение. Найдем частные решения ОЛДУ:

$$y''' + y' = 0, \quad k^3 + k = 0, \quad k_1 = 0, \quad k_{2,3} = \pm i.$$

Значит, $y_1 = 0$, $y_2 = \cos x$, $y_3 = \sin x$ — фундаментальная система решений. Общее решение ОЛДУ

$$\bar{y} = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Варьируем постоянные

$$y = C_1(x) + C_2(x) \cos x + C_3(x) \sin x.$$

Составим систему уравнений для определения $C'_i(x)$:

$$\begin{cases} C'_1 \cdot 1 + C'_2 \cos x + C'_3 \sin x = 0 \\ -C'_2 \sin x + C'_3 \cos x = 0 \\ -C'_2 \cos x - C'_3 \sin x = \frac{1}{\sin x}. \end{cases}$$

Решение этой системы :

$$\begin{cases} C'_1 = \frac{1}{\sin x} \\ C'_2 = -\frac{\cos x}{\sin x} \\ C'_3 = -1. \end{cases}$$

Найдем $C_i(x)$:

$$\begin{cases} C_1(x) = \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + D_1 \\ C_2(x) = \int -\frac{\cos x}{\sin x} dx = -\ln |\sin x| + D_2 \\ C_3(x) = -x + D_3. \end{cases}$$

Запишем общее решение НЛДУ :

$$y = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + D_1 + (-\ln |\sin x| + D_2) \cos x + (-x + D_3) \sin x$$

или

$$y = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \cos x \ln |\sin x| - x \sin x + D_1 + D_2 \cos x + D_3 \sin x.$$

1.3.5. Уравнение Эйлера

(Однородным) уравнением Эйлера называется ДУ вида

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0, \quad (1.27)$$

где все a_i — постоянные. Характерным признаком уравнения Эйлера является совпадение степени аргумента и порядка производной искомой функции в каждом слагаемом.

★ Для решения однородного уравнения Эйлера нужно составить и решить характеристическое уравнение. Проще всего сделать это подстановкой $y = x^k$ (при подстановке учитываем, что $y' = kx^{k-1}$, $y'' = k(k-1)x^{k-2}, \dots$, $y^{(n)} = k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)x^{k-n}$). По виду корней характеристического уравнения находим ФСР, а значит, и общее решение. Для случая $n = 2$ соответствие между корнями и фундаментальными функциями приведено в таблице (для ДУ высших степеней см. приложения на С.73).

Корни хар. уравнения	ФСР уравнения Эйлера
$k_{1,2}$ — действительные и различные	$y_1 = x^{k_1},$ $y_2 = x^{k_2}$
$k_1 = k_2 = \tilde{k}$ — действительные и кратные	$y_1 = x^{\tilde{k}},$ $y_2 = x^{\tilde{k}} \ln x$
$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ — комплексные	$y_1 = x^\alpha \cos(\beta \ln x),$ $y_2 = x^\alpha \sin(\beta \ln x)$

Пример 1. Решить уравнения Эйлера:

1) $x^2 y'' + xy' - y = 0$; 2) $x^2 y'' - xy' + y = 0$; 3) $x^2 y'' + xy' + y = 0$.

Решение. 1). После степенной подстановки $y = x^k$ получаем характеристическое уравнение $k(k-1) + k - 1 = 0$, его корни $k_1 = -1$, $k_2 = 1$. Общее решение ДУ: $y = \frac{C_1}{x} + C_2 x$.

2). Уравнение $k(k-1) - k + 1 = 0$ имеет совпадающие корни $k_{1,2} = 1$. Общее решение ДУ: $y = C_1 x + C_2 x \ln x = (C_1 + C_2 \ln x)x$.

3). После подстановки $y = x^k$ получим характеристическое уравнение $k(k-1) + k + 1 = 0$, которое имеет комплексно сопряженные корни $k_{1,2} = \pm i$. Общее решение: $y = C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x$.

1.3.6. Задачи для самостоятельного решения

1. $y'' + 4y = \cos 2x$

(Ответ: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{x}{4} \sin 2x$).

2. $y'' - 3y' + 2y = 0$ $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$

(Ответ: $y = 7e^x - 5e^{2x}$).

3. $y'' + y' + y = 3e^{2x}$

(Ответ: $y = e^{-\frac{1}{2}x} (C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x) + \frac{3}{7}e^{2x}$).

$$4. y'' - 8y' + 7y = 3x^2 + 7x + 8$$

$$(\text{ОТВЕТ: } y = C_1 e^x + C_2 e^{7x} + \frac{3}{7}x^2 + \frac{97}{49}x + \frac{1126}{343}).$$

$$5. y'' - 2y' + 10y = x \cos 2x$$

$$(\text{ОТВЕТ: } y = e^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + (\frac{3}{26}x + \frac{29}{338}) \cos 2x + (-\frac{1}{13}x - \frac{1}{169}) \sin 2x).$$

$$6. x^2 y'' + xy' - y = 0$$

$$(\text{ОТВЕТ: } y = C_1 x + C_2 x^{-1}.)$$

Глава 2

Ряды

2.1. Числовые ряды

2.1.1. Определение и вычисление суммы ряда

Пусть u_1, u_2, u_3, \dots — числовая последовательность. Выражение вида $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *числовым рядом*. Сумма первых n слагаемых $u_1 + u_2 + \dots + u_n = S_n$ называется *n -й частичной суммой* ряда. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *сходящимся*, если существует конечный предел S последовательности S_n его частичных сумм $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Если данный предел равен бесконечности или не существует, то ряд называется *расходящимся*. Для сходящегося ряда число S называется *суммой* ряда.

★ Вычисление суммы числового ряда с помощью определения сводится к вычислению предела последовательности S_n , при этом используются свойства числовых последовательностей и приемы вычисления их пределов. Однако, прежде всего нужно найти формулу n -го члена последовательности S_n по известной формуле общего члена ряда u_n . Рассмотрим эту задачу на примерах.

Пример 1. Найти формулу n -го члена последовательности S_n частичных сумм следующих числовых рядов:

$$1) \frac{1}{6} + \frac{3^2 - 2^2}{6^2} + \frac{3^3 - 2^3}{6^3} + \dots; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}; \quad 3) \frac{7}{3 \cdot 8} + \frac{9}{4 \cdot 15} + \frac{11}{5 \cdot 24} + \dots$$

Решение. 1). Заметим, что если u_n — n -й член ряда, то

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{6} = \frac{3^1 - 2^1}{6^1} = \frac{3^1}{6^1} - \frac{2^1}{6^1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \\ u_2 &= \frac{3^2 - 2^2}{6^2} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}, \quad u_3 = \frac{3^3 - 2^3}{6^3} = \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} \dots, \\ u_n &= \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}. \end{aligned}$$

Поэтому n -е частичные суммы S_n будут иметь вид:

$$S_1 = u_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, S_2 = u_1 + u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}\right),$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3}\right),$$

$$S_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}\right).$$

Просуммируем стоящие в скобках n первых членов геометрических прогрессий со знаменателями q ($q = \frac{1}{2}$ и $q = \frac{1}{3}$) по формуле $\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ (b_1 — первый член прогрессии). Получим

$$S_n = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{2 \cdot \frac{1}{2}} - \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{3 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2 \cdot 3^n}, n = 1, 2, \dots$$

2). Для того чтобы решить эту задачу, представим общий член ряда в виде суммы простейших дробей:

$$u_n = \frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3 \cdot n} - \frac{1}{3 \cdot (n+3)}.$$

Коэффициенты $\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{3}$ мы здесь просто подобрали, однако можно было действовать методом неопределенных коэффициентов. Теперь вычислим частичные суммы.

$$S_1 = u_1 = \frac{1}{3 \cdot 1} - \frac{1}{3 \cdot 4}, S_2 = u_1 + u_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right),$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right).$$

Начиная с 4-й частичной суммы некоторые слагаемые (они подчеркнуты) начнут сокращаться:

$$S_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\underline{4}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{\underline{4}} - \frac{1}{7} \right)$$

$$S_5 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\underline{4}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\underline{5}} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{\underline{4}} - \frac{1}{7} + \frac{1}{\underline{5}} - \frac{1}{8} \right) \dots$$

Легко понять, что, начиная с $n = 3$, формула частичной суммы будет следующей:

$$S_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right).$$

3). В этой задаче прежде всего необходимо записать формулу общего члена ряда. Для этого заметим, что если нумеровать слагаемые начиная с $n = 3$, то $u_n = \frac{2n+1}{n(n^2-1)}$. Далее, так же как в пункте 2), представим полученную дробь в виде суммы простейших. Здесь используем метод неопределенных коэффициентов:

$$u_n = \frac{2n+1}{n(n^2-1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{(n-1)} + \frac{C}{n+1}.$$

Приводим правую часть к общему знаменателю и приравниваем полученный числитель к числителю левой части. В результате получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ B - C = 2 \\ -A = 1 \end{cases}.$$

Ее решение $A = -1, B = \frac{3}{2}, C = -\frac{1}{2}$. Таким образом, получено следующее разложение:

$$u_n = -\frac{1}{n} + \frac{3}{2(n-1)} - \frac{1}{2(n+1)}, \quad n = 3, 4, \dots$$

Теперь вычислим частичные суммы:

$$S_1 = u_3 = -\frac{1}{3} + \frac{3}{2 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 4},$$

$$S_2 = u_3 + u_4 = -\frac{1}{3} + \frac{3}{2 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 4} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 5},$$

$$S_3 = u_3 + u_4 + u_5 = -\frac{1}{3} + \frac{3}{2 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 4} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 5} - \frac{1}{5} + \frac{3}{2 \cdot 4} - \frac{1}{2 \cdot 6}, \dots$$

Заметим, что, начиная с S_3 , промежуточные слагаемые сокращаются (они подчеркнуты). В формуле останутся лишь 6 слагаемых:

$$S_k = -\frac{1}{3} + \frac{3}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot (k+2)} - \frac{1}{k+2} - \frac{1}{2 \cdot (k+3)}, \quad k = 3, 4, \dots$$

Пример 2. Исследовать сходимость и найти суммы, если это возможно, следующих числовых рядов:

$$1) \frac{1}{6} + \frac{3^2 - 2^2}{6^2} + \frac{3^3 - 2^3}{6^3} + \dots; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}; \quad 3) \frac{7}{3 \cdot 8} + \frac{9}{4 \cdot 15} + \frac{11}{5 \cdot 24} + \dots$$

Решение. Основной частью этой задачи является нахождение формулы n -го члена последовательности частичных сумм. Но это мы сделали в примере 1. Осталось исследовать существование предела числовой последовательности S_n .

1). Для первого ряда имеем:

$$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2 \cdot 3^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Вычисляем сумму ряда как предел:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2 \cdot 3^n} \right) = \frac{1}{2}.$$

2). Для второго ряда частичные суммы имеют вид:

$$S_1 = \frac{1}{4}, \quad S_2 = \frac{7}{20},$$

$$S_n = \frac{1}{3} \left(\frac{11}{6} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right), \quad n = 3, 4, \dots$$

Поскольку предел последовательности не зависит от значения конечного числа ее членов, сумма ряда есть предел:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{11}{6} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{11}{18}.$$

3). Рассуждая так же как в пункте 2), выписываем формулу частичных сумм (см. пример 1 пункт 3)):

$$S_k = \frac{7}{12} - \frac{1}{2 \cdot (k+2)} - \frac{1}{k+2} - \frac{1}{2 \cdot (k+3)}, \quad k = 3, 4, \dots,$$

и считаем предел последовательности:

$$S = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{12} - \frac{1}{2 \cdot (k+2)} - \frac{1}{k+2} - \frac{1}{2 \cdot (k+3)} \right) = \frac{7}{12}.$$

Пример закончен, однако стоит заметить, что нахождение формулы n -го члена последовательности частичных сумм — задача сложная и в большинстве случаев не решаемая. Тем не менее, определение суммы ряда не единственный инструмент в исследовании сходимости рядов и вычислении их сумм.

2.1.2. Признаки сходимости знакоположительных рядов

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется знакоположительным, если все u_n неотрицательны. Напомним основные теоремы — признаки сходимости знакоположительных рядов.

Теорема 2.1 (интегральный признак Коши)

Пусть а) функция $f(x)$ определена для всех $x \geq 1$; б) $f(x) \geq 0$ на области определения; в) $f(x)$ монотонно убывает. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, составленный из значений $f(x)$ при натуральных значениях аргумента, и несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ ведут себя одинаково — оба сходятся или оба расходятся.

Теорема 2.2 (признак сравнения)

Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, причем $0 \leq u_n \leq v_n$. Тогда:

- 1) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится (и имеет сумму \mathfrak{S}), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ тем более сходится (обозначим его сумму как S), причем $S \leq \mathfrak{S}$;
- 2) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ тоже расходится.

Теорема 2.3 (предельный признак сравнения)

Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, причем все $u_n > 0$, $v_n > 0$, и пусть существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = K$. Тогда:

- 1) если $0 \leq K < \infty$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ тоже сходится;
- 2) если $0 < K \leq \infty$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ тоже расходится;
- 3) если $0 < K < \infty$, то ряды ведут себя одинаково (оба сходятся или оба расходятся).

Теорема 2.4 (признак Д'Аламбера)

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, причем все $u_n > 0$, и пусть существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$.

Тогда:

- 1) если $\lambda < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится;
- 2) если $\lambda > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится;
- 3) если $\lambda = 1$, то признак неэффективен (ряд может как сходиться, так и расходиться).

Теорема 2.5 (радикальный признак Коши)

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, причем все $u_n > 0$, и пусть существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda$.

Тогда:

- 1) если $\lambda < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится;

2) если $\lambda > 1$, то ряд расходится;

3) если $\lambda = 1$, то признак неэффективен (ряд может как сходиться, так и расходиться).

Теорема 2.6 (необходимый признак сходимости) Если ряд сходится (неважно знакоположительный или знакопеременный), то предел его общего члена равен нулю.

Теперь для исследования сходимости рядов мы можем использовать не только определение суммы ряда, но и все сформулированные признаки сходимости.

★ Исследование сходимости ряда полезно начинать с проверки необходимого признака: если предел общего члена не ноль, то ряд расходится; если ноль, то продолжаем исследование, подбирая по виду ряда подходящий признак сходимости. Особенность применения признаков сравнения — предварительная формулировка гипотезы о сходимости ряда и подбор эталонного ряда для сравнения. Здесь часто используется эквивалентность бесконечно больших и бесконечно малых величин.

Пример. Исследовать на сходимость следующие ряды:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-n}{n(n+1)(n+2)}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{2}{n}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \ln(3n+1)};$$
$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1} \sqrt{n^2+5}}{(n-1)!}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1} \right)^{n/2}.$$

Решение. 1). Легко понять, что предел общего члена ряда на бесконечности — ноль, поэтому продолжаем исследование. Функция, стоящая под знаком ряда — знакопеременная и, начиная с $n = 5$, — отрицательная. Перепишем ряд в виде суммы:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-n}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^4 \frac{4-n}{n(n+1)(n+2)} - \sum_{n=5}^{\infty} \frac{n-4}{n(n+1)(n+2)}.$$

Понятно, что первоначальный ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится знакоположительный ряд $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{n-4}{n(n+1)(n+2)}$. Изучим его. Заметим, что под знаком ряда стоит дробно-рациональная функция. Такого типа ряды проще всего исследовать с помощью предельного признака сравнения (теорема 2.3). Сравним будем с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. Известно, что если $\alpha > 1$, то ряд сходится и если $\alpha \leq 1$, то — расходится. Подбираем эталонный ряд (т.е. вычисляем α): бесконечно большая величина $n - 4$ эквивалентна n , а бесконечно большая

$n(n+1)(n+2)$ эквивалентна n^3 . Поэтому дробь $\frac{n-4}{n(n+1)(n+2)}$ ведет себя на бесконечности так же, как $\frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$. Теперь применим предельный признак сравнения, используя в качестве эталонного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Находим предел отношения общих членов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-4)n^2}{n(n+1)(n+2)} = 1.$$

Так как 1 – конечное число, отличное от нуля, ряды ведут себя одинаково. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, а значит, знакоположительный ряд $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{n-4}{n(n+1)(n+2)}$ тоже сходится, а вместе с ним сходится и первоначальный знакпеременный.

2). Начнем, как всегда, с вычисления предела общего члена ряда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{2}{n} = 2 \neq 0.$$

Значит ряд расходится (по необходимому признаку сходимости, теорема 2.6).

3). Вычислить предел общего члена ряда можно, например, с помощью правила Лопиталья:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n7\sqrt[3]{n^4}} = 0.$$

Далее применим к ряду неопределенный признак сравнения. Действовать, как в примере 1), мы не можем, так как бесконечно большая $\ln n$ не эквивалентна никакой степенной функции.² Для нашего ряда используем неравенство: $\ln n < n$. Тогда $\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}} < \frac{n}{\sqrt[3]{n^7}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$ сходится как степенной с показателем больше единицы, то и меньший ряд тоже сходится (по признаку сравнения, теорема 2.2).

4). Для этого ряда очевидно, что предел общего члена ряда равен нулю. Следующий этап – выбор признака сходимости. Сравнение со степенными рядами здесь не работает. Однако проведем сравнение с чуть подправленным рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1) \ln(3n+1)}.$$

Для этого найдем предел отношения общих членов сравниваемых рядов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1) \ln(3n+1)}{(3n+1) \ln(3n+1)} = \frac{2}{3} - \text{конечное число, отличное от 0.}$$

²При сравнении полезно соотношение, связывающее логарифмическую функцию со степенными: если $\beta > 0$, то $x^\beta > \ln x$ для достаточно больших положительных x , начиная с некоторого x_0 .

Таким образом, ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\ln(3n+1)}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)\ln(3n+1)}$ ведут себя одинаково (по предельному признаку сравнения, теорема 2.3). Для второго ряда воспользуемся интегральным признаком Коши. Вычислим соответствующий ряду несобственный интеграл:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(3x+1)\ln(3x+1)} dx = \frac{1}{3} \ln(\ln(3x+1)) \Big|_1^{\infty} = \infty.$$

То есть интеграл $\int_1^{\infty} \frac{1}{(3x+1)\ln(3x+1)} dx$ расходится, а следовательно, расходится и соответствующий ему ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)\ln(3n+1)}$ (по интегральному признаку Коши, теорема 2.1). Но тогда и первоначальный ряд расходится.

5). Эта задача подразумевает применение признака Д'Аламбера, теорема 2.4, (например потому, что под знаком ряда присутствует факториал). Составим и вычислим отношение $(n+1)$ -го члена ряда к n -му:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4^n \sqrt{(n+1)^2 + 5} (n-1)!}{n! 4^{n-1} \sqrt{n^2 + 5}} = \frac{4 \sqrt{(n+1)^2 + 5}}{n \sqrt{n^2 + 5}}.$$

Посчитаем предел найденного отношения:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \sqrt{(n+1)^2 + 5}}{n \sqrt{n^2 + 5}} = 0 < 1.$$

Так как полученный предел меньше 1, ряд (по признаку Д'Аламбера) сходится.

6). Последний ряд исследуем с помощью радикального признака Коши (теорема 2.5):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{n/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1.$$

Поскольку предел меньше 1, ряд сходится.

★ Заметим, что признаки Д'Аламбера и Коши радикальный более удобны, так как не требуют подбора эталонов. Кроме того, в этом случае вычисление пределов по теоремам Коши или Д'Аламбера не сложнее, чем вычисление предела общего члена ряда по необходимому признаку сходимости. Поэтому в примерах 5) и 6) мы не проверяем равен ли нулю предел общего члена ряда. Однако теоремы Коши и Д'Аламбера не всегда применимы.

2.1.3. Знакопеременные и комплексные ряды

Знакопеременным называется ряд, слагаемые которого имеют разные знаки. *Знакопеременяющимся* называется ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1}a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}a_n,$$

где все $a_n > 0$ или $a_n < 0$.

Будем рассматривать ряды вида $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где u_n — числа действительные произвольного знака или комплексные.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *условно сходящимся*, если сам он сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится. Напомним основные теоремы раздела.

Теорема 2.7 (об абсолютной сходимости ряда)

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, составленный из модулей, сходится. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ тоже сходится.

Теорема 2.8 (о сходимости комплекснозначных рядов)

Пусть из комплексных чисел $z_n = x_n + iy_n$ образован ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Справедливы утверждения :

1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся по отдельности

ряды $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, причем $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n$;

2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ абсолютно сходится тогда и только тогда, когда абсолютно сходятся

ряды $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

Теорема 2.9 (признак Лейбница)

Пусть для знакопеременяющегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}a_n$, $a_n > 0$, выполняются условия :

1) слагаемые ряда убывают по модулю: $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$,

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Тогда ряд сходится, а сумма ряда не превосходит модуль первого слагаемого:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}a_n \leq a_1.$$

★ Отметим *основные этапы решения задачи на сходимость* ряда.

1. Исследование сходимости действительных знакочередующихся и комплексных рядов (так же как и знакоположительных) стоит начинать с проверки необходимого признака сходимости (см. С. 40, теорема 2.6). Причем изучение сходимости комплексного ряда сводится к изучению сходимости двух действительных рядов. В силу теоремы 2.8 комплексный ряд расходится тогда и только тогда, когда расходится хотя бы один из составляющих его действительных рядов.

2. Далее, если необходимый признак сходимости выполняется, нужно посмотреть абсолютную сходимость ряда. Для ряда из модулей, как знакоположительного, подбираем один из признаков сходимости. Если абсолютная сходимость есть, то исследование закончено (в силу теоремы 2.7).

3. Если абсолютной сходимости нет, то исследуем ряд (или ряды) на условную сходимость, например по признаку Лейбница (теорема 2.9).

Пример. Исследовать сходимость следующих рядов:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 3^n}{3^n}, \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{3n},$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n, \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{5n+2} + i \frac{\ln n}{n} \right).$$

Решение. 1). Заметим, прежде всего, что первый ряд является знакочередующимся, но не знакочередующимся. Рассмотрим предел общего члена ряда: $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{\sin 3^n}{3^n} = 0$, так как $(-1)^n \frac{1}{3^n}$ — бесконечно малая, а $\sin 3^n$ — ограниченная. Продолжим исследование: рассмотрим ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin 3^n|}{3^n}$. Ограничим общий член ряда: $\frac{|\sin 3^n|}{3^n} < \frac{1}{3^n}$. Поскольку ряд геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ сходится, то меньший ряд тоже сходится (признак сравнения знакоположительных рядов). Следовательно, первоначальный ряд сходится абсолютно.

2). Этот ряд является знакочередующимся. Проверим необходимый признак сходимости:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{2n-1}{3n} = \begin{cases} \frac{2}{3} & ; n = 2k, \\ -\frac{2}{3} & ; n = 2k+1. \end{cases}$$

То есть предел общего члена не существует, а значит, ряд расходится.

3). Ряд знакочередующийся. Ряд из модулей имеет вид: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$, поэтому удобно его исследовать с помощью радикального признака Коши (в частности,

необходимый признак сходимости проверять не будем).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Следовательно, первоначальный ряд абсолютно сходится.

4). Ряд из действительных частей $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n+2}$ — знакочередующийся и сходится по признаку Лейбница. Действительно: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5n+2} = 0$, и последовательность $\frac{1}{5n+2}$ монотонно убывает. Абсолютной сходимости здесь нет, так как общий член ряда из модулей $\frac{1}{5n+2}$ эквивалентен (как бесконечно малая) общему члену расходящегося гармонического ряда $\frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Ряд из мнимых частей $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ — знакоположительный, общий член его стремится к нулю. Для исследования сходимости применим признак сравнения (теорема 2.2): $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{\ln 2}{n}$ для $n \geq 2$. Для меньшего ряда имеем $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2}{n} = \ln 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, значит, он расходится. Следовательно, расходится ряд из мнимых частей. Вывод: весь комплексный ряд — расходящийся.

2.1.4. Приближенное вычисление сумм числовых рядов

До сих пор сумму числового ряда мы вычисляли по определению, что, во-первых, трудно и, во-вторых, в большинстве случаев невозможно. Но вычислять точное значение суммы, как правило, не нужно. Приближенное вычисление суммы ряда основано на том, что S есть предел частичных сумм S_N . Тогда S_N есть приближенное значение S с абсолютной погрешностью

$$|S - S_N| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n \right| = |R_N|.$$

Будем говорить, что *сумма ряда вычислена с точностью ε* , если абсолютная погрешность не превосходит ε , то есть: $|S - S_N| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n \right| = |R_N| \leq \varepsilon$. Оценить абсолютную погрешность, значит оценить остаток ряда R_N по абсолютной величине. Числовые ряды R_N будем оценивать двумя способами. Для оценки знакочередующегося ряда будем использовать теорему Лейбница (см. С.43, теорема 2.9); для знакоположительного — хорошо суммируемый ряд бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

★ Пусть нужно найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с точностью ε . Для этого следует:

1) убедиться, что ряд сходится; 2) из неравенства $|R_N| \leq \varepsilon$ с помощью оценок

найти N ; 3) вычислить сумму N первых слагаемых S_N (учитывая накапливаемую погрешность округления и арифметических операций) и взять ее в качестве приближенного значения для S .

Пример 1. Вычислить сумму ряда с точностью ε :

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n^3(n+1)}, \varepsilon = 0,01; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!}, \varepsilon = 0,001.$$

Решение. 1). Первый ряд является знакоперевающимся сходящимся рядом, так как удовлетворяет условиям теоремы Лейбница (см. С.43, теорема 2.9). По заключению этой теоремы сумма знакопеременяющегося ряда не превосходит модуля своего первого слагаемого. Этот факт мы используем для оценки остатка ряда:

$$|R_N| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n^3(n+1)} \right| \leq |u_{N+1}| = \frac{2(N+1)+1}{(N+1)^3((N+1)+1)}.$$

Если мы потребуем, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{2(N+1)+1}{(N+1)^3((N+1)+1)} \leq \varepsilon = 0,01,$$

заданная точность будет достигнута. Из этого неравенства находим N . Проще всего это сделать подбором:

$$N = 1, u_2 = \frac{5}{24} \not\leq \frac{1}{100}; \quad N = 2, u_3 = \frac{7}{27 \cdot 4} \not\leq \frac{1}{100}, \dots$$

$$N = 5, u_6 = \frac{13}{216 \cdot 7} \leq \frac{1}{100}.$$

Следовательно, для $N \geq 5$ достигается точность $\varepsilon = 0,01$. Понятно, что для вычисления частичной суммы достаточно взять 5 слагаемых:

$$S \approx S_5 = \sum_{n=1}^5 (-1)^n \frac{2n+1}{n^3(n+1)} \approx -1,7304 \approx -1,73$$

Вычисляя слагаемые частичной суммы в десятичных дробях, мы обеспечиваем два верных знака после запятой, то есть точность округлений и арифметических операций берем на порядок больше (этого, как правило, достаточно).

2). Этот ряд знакоположительный, сходящийся (например, по признаку Д'Аламбера, см. С. 39). Оценим остаток ряда суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Для этого заметим, что

$$\text{если } n = 2, \text{ то } u_2 = \frac{2^2}{(4)!} \leq \frac{2^2}{4^2} = \frac{1}{2^2}; \text{ если } n = 3, \text{ то } u_3 = \frac{2^3}{(6)!} \leq \frac{2^3}{4^3} = \frac{1}{2^3};$$

если $n \geq 4$, то $(2n)! = 1 \cdot \dots \cdot \underbrace{n}_{\geq 4} \cdot \underbrace{(n+1)}_{\geq 4} \cdot \dots \cdot \underbrace{(2n)}_{\geq 4} \geq 4^n$, т.е. $u_n = \frac{2^n}{(2n)!} \leq \frac{2^n}{4^n} = \frac{1}{2^n}$.

Таким образом, остаток ряда R_N , $N \geq 1$, оценивается рядом геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{2}$:

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^N}.$$

Потребуем, чтобы выполнялось неравенство $\frac{1}{2^N} \leq \varepsilon = 0,001$. Тогда требуемая точность будет достигнута, начиная с $N = 10$. Теперь вычисляем частичную сумму S_{10} , гарантируя три верных знака после запятой:

$$S \approx S_{10} = \sum_{n=1}^{10} \frac{2^n}{(2n)!} \approx 1,67755 \approx 1,678.$$

★ Стоит заметить, что оценка остатка ряда может быть достаточно грубой (то есть завышенной), что приводит к суммированию большего количества слагаемых в частичной сумме. Проиллюстрируем это на примере.

Пример 2. Оценить погрешность равенства $S \approx S_{10}$ для следующего числового ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!} = S.$$

Решение. Погрешность и есть остаток ряда. Оценим его более аккуратно, чем в предыдущем примере. Если $n \geq 10$, то

$$(2n)! = 1 \cdot \dots \cdot n(n+1) \cdot \dots \cdot (2n) \geq 10^n, \text{ то есть } u_n = \frac{2^n}{(2n)!} \leq \frac{2^n}{10^n} = \frac{1}{5^n}.$$

Следовательно,

$$R_{10} = \sum_{n=11}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!} \leq \sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{5^{11}} = \frac{1}{4 \cdot 5^{10}} \leq 10^{-7}.$$

Мы видим, что десять слагаемых в частичной сумме могут обеспечить 6 верных знаков после запятой. Таким образом, реальная точность приближенной формулы $S \approx S_{10}$ гораздо выше, чем гарантированная в предыдущем примере. Но нужно учесть, что была поставлена обратная задача.

2.1.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 12n - 5}$ по определению. (Ответ: $\frac{7}{10}$.)

2. Исследовать сходимость рядов:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{2 + (-1)^n}{n^3}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^{(n-1)} + n - 1}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n^3 + 1)}{(n + 1)!};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n + 1)}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n + 1} \right)^n; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n + 3)}{\ln(n + 4)}.$$

(Ответы: 1) сходится; 2) сходится; 3) сходится; 4) расходится; 5) сходится; 6) расходится.)

3. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$ с заданной точностью $\varepsilon = 0,001$.

2.2. Функциональные ряды

2.2.1. Область сходимости функционального ряда

Если $u_n(x)$ — последовательность функций, определенных на некотором множестве X , то *функциональным рядом* называется выражение вида

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

Пусть числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$, составленный из значений $u_n(x)$ в точке x_0 , сходится к числу $S(x_0)$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *сходящимся* в этой точке, а сама точка x_0 есть *точка сходимости* функционального ряда.

Функция $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, определенная на множестве точек сходимости ряда, называется *суммой функционального ряда*.

Множество точек сходимости функционального ряда называется его *областью сходимости*.

Множество точек x , для которых сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ (функции $u_n(x)$ знакопеременные), будем называть областью *абсолютной сходимости* функционального ряда. Область абсолютной сходимости содержится в области сходимости ряда (см. С. 43, теорема 2.7).

★ Задачу нахождения области сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ можно переформулировать как задачу исследования сходимости соответствующего числового ряда в зависимости от значения параметра x . Поэтому здесь используются признаки сходимости числовых рядов.

Пример. Найти область сходимости следующих функциональных рядов:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n^2}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} 2n^2 \sqrt{x-2} e^{\frac{-n^2}{(x-1)^3}}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{2n}.$$

Решение. 1). Отметим сначала, что область определения слагаемых ряда $u_n(x) = \frac{\sin^n x}{n^2}$ — вся действительная ось. Но для любого x верно неравенство: $|\frac{\sin^n x}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$. По признаку сравнения (см. С.39, теорема 2.2), для всякого фиксированного x ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n^2}$ абсолютно сходится, так как сходится степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Значит, область сходимости, более того — абсолютной сходимости, вся действительная ось.

2). Область определения функций $u_n(x) = 2n^2 \sqrt{x-2} e^{\frac{-n^2}{(x-1)^3}}$ — луч $x \geq 2$. Тогда $\frac{-n^2}{(x-1)^3} < 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n^2 \sqrt{x-2} e^{\frac{-n^2}{(x-1)^3}} = 0$ для всякого $x \geq 2$. Таким образом, необходимый признак сходимости выполняется для всех допустимых значений параметра x . Теперь исследуем ряд на абсолютную сходимость, для чего применим радикальный признак Коши (см. С. 39, теорема 2.5):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2n^2 \sqrt{x-2} e^{\frac{-n^2}{(x-1)^3}}} = 0 < 1 \text{ для любого } x \geq 2.$$

Таким образом, ряд абсолютно сходится на области определения $x \geq 2$.

3). Область определения функций-слагаемых — вся действительная ось. Исследуем абсолютную сходимость ряда с помощью признака Д'Аламбера (см. С. 39, теорема 2.4):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-2|^{2(n+1)} 2n}{2(n+1)|x-2|^{2n}} = |x-2|^2.$$

Если $|x-2| < 1$, то ряд абсолютно сходится. Для x , таких, что $|x-2| > 1$, ряд расходится, так как предел общего члена ряда не равен нулю (см. С.39, теорема 2.6):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{2n} = \infty.$$

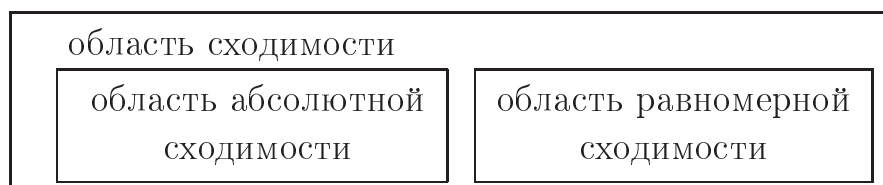
Отдельно рассмотрим $x-2 = \pm 1$. Подставим $x = 3$ в первоначальный ряд, получим: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n}$ — сходящийся условно знакопеременный ряд (см. С.43, теорема 2.9). При подстановке $x = 1$, получим также ряд Лейбница, сходящийся условно: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{3n-1} \frac{1}{2n}$. Таким образом, область сходимости найдена — это отрезок $[1, 3]$, а область абсолютной сходимости — открытый интервал $(1, 3)$.

2.2.2. Равномерная сходимость функционального ряда

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* на множестве X , если последовательность его частичных сумм $S_n(x)$ *равномерно сходится* к сумме $S(x)$ на этом множестве, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall x \in X \forall n > N |S(x) - S_n(x)| = |R_n(x)| < \varepsilon.$$

Известно, что равномерная (так же как абсолютная) сходимость на множестве X влечет сходимость ряда в каждой точке этого множества. Но абсолютная и равномерная сходимость не связаны причинно-следственной связью. Поэтому соотношение между областями сходимости разного сорта можно изобразить схематично диаграммой:



Сформулируем достаточный признак сходимости.

Теорема 2.10 (признак равномерной сходимости Вейерштрасса)

Пусть для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ существует такой числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (называемый *мажорирующим рядом* или *мажорантой*), что $|u_n(x)| \leq a_n, \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}$, причем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на множестве X .

★ Исследование равномерной сходимости ряда будем проводить с помощью признака Вейерштрасса. Для этого необходимо сверху оценить функции-слагаемые ряда на некотором множестве независимо от x . Полученный оценкой числовой ряд (мажоранта) должен быть сходящимся.

Пример 1. Исследовать равномерную сходимость рядов на множестве:

$$\begin{aligned}
 & 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1+(nx)^2)} \text{ на интервале } (-\infty, +\infty); \\
 & 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x+1} \cos nx}{\sqrt[3]{n^5+1}} \text{ на отрезке } [0, 2].
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Решение. 1). Подберем мажорирующий ряд. Так как уменьшение знаменателя увеличивает дробь, для любого действительного x верно неравенство

$$\frac{1}{n^2(1+(nx)^2)} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, поэтому функциональный ряд равномерно сходится на всей числовой прямой (по признаку Вейерштрасса, см. теорему 2.10). В частности, область сходимости и область равномерной сходимости здесь совпадают (это вся действительная ось).

2). Область определения функций-слагаемых — луч $x \geq -1$. Отрезок $[0, 2]$ есть часть области определения и на этом отрезке верны неравенства:

$$|\cos nx| \leq 1; 1 \leq \sqrt{x+1} \leq \sqrt{3}; \sqrt[3]{n^5+1} \geq \sqrt[3]{n^5}, \text{ т.е. } \left| \frac{\sqrt{x+1} \cos nx}{\sqrt[3]{n^5+1}} \right| \leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{n^5}}.$$

Так как числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$ с показателем $\frac{5}{3} > 1$ сходится, то первоначальный функциональный ряд равномерно сходится на множестве $[0, 2]$.

2.2.3. Степенные ряды

Степенным называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

Здесь x , x_0 и коэффициенты a_n — вообще говоря, комплексные числа. Заменой $(x-x_0) = z$ можно привести ряд к более простому виду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Теорема 2.11 (об области сходимости степенного ряда)

Для всякого степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ существует число $R \geq 0$ (радиус сходимости ряда) такое, что на множестве $|x-x_0| < R$ ряд абсолютно сходится, на множестве $|x-x_0| > R$ — расходится, а в граничных точках $|x-x_0| = R$ может вести себя по-разному.

Теорема 2.12 (о равномерной сходимости степенного ряда)

Действительный степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ равномерно сходится на любом отрезке, лежащем внутри интервала сходимости ряда.

Следствие 1. Сумма степенного ряда является непрерывной функцией внутри его интервала сходимости.

Следствие 2. Степенной ряд можно почленно интегрировать, если пределы интегрирования лежат внутри его интервала сходимости, и проинтегрированный ряд будет равномерно сходиться в той же области.

Следствие 3. Степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз внутри его интервала сходимости, и ряд из производных будет иметь тот же интервал сходимости, что и исходный, за исключением, может быть, граничных точек.

★ В силу теоремы 2.11 область сходимости степенного ряда отличается от области абсолютной сходимости разве что в граничных точках ($|x - x_0| = R$). А находить область абсолютной сходимости можно? используя признаки сходимости знакоположительных рядов (Д'Аламбера и Коши). ³ Исследование сходимости в граничных точках проводится отдельно подстановкой точек в ряд.

Пример . 1). Найти круг сходимости комплекснозначного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z + 5i)^{2n+2}}{4^n(2n^2 - 1)} .$$

2). Найти область сходимости действительного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 7)^n}{3^n(n + 1)} .$$

Вычислить с точностью $\varepsilon = 0,01$ сумму ряда в точках $x = 7 \pm \frac{R}{5}$, где R — радиус сходимости ряда.

3). Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)} \left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n-1} .$$

Решение . 1). Для исследования абсолютной сходимости ряда используем признак Д'Аламбера (см. С.39 , теорема 2.4):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z + 5i|^{2(n+1)+2} 4^n (2n^2 - 1)}{4^{n+1} (2(n+1)^2 - 1) |z + 5i|^{2n+2}} = \frac{|z + 5i|^2}{4} < 1 .$$

Полученное неравенство $|z + 5i| < 2$ задает на комплексной плоскости круг с центром в точке $z_0 = -5i$ радиуса 2. На границе этого круга $|z + 5i| = 2$ и

³можно использовать формулы-следствия этих признаков для нахождения радиуса сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$:
 $R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ или $R^{-1} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

ряд из модулей имеет вид: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n^2-1)}$, но такой числовой ряд сходится. Итак, область сходимости ряда — круг на комплексной плоскости $|z + 5i| \leq 2$.

2). Применим признак Д'Аламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^n(n+1)(x-7)^{n+1}}{3^{n+1}((n+1)+1)(x-7)^n} \right| = \frac{1}{3} |x-7|.$$

Значит, в интервале $|x-7| < 3$ ряд сходится. Рассмотрим граничные точки этого интервала: $x = 4$, $x = 10$. При подстановке их в степенной ряд получим числовые ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$. Первый из этих рядов — знакочередующийся, удовлетворяющий теореме Лейбница (см. 43, теорема 2.9), поэтому $x = 4$ — точка сходимости. Второй ряд — расходящийся знакоположительный, то есть $x = 10$ не входит в область сходимости. Интервал сходимости найден: $4 \leq x < 10$. Теперь подставим в ряд точки $x = 7 \pm \frac{R}{5} = 7 \pm \frac{3}{5}$. Получим числовые ряды:

$$S\left(7 - \frac{3}{5}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n(n+1)}, \quad S\left(7 + \frac{3}{5}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n(n+1)}.$$

Первый из этих рядов — знакоположительный, второй — знакочередующийся (оба сходятся, так как точка x находится внутри области сходимости). Приближенное вычисление сумм числовых рядов было описано в разделе 2.1.4 на С. 45. Для вычисления суммы знакоположительного ряда оценим его сверху рядом геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{5^n(n+1)} < \frac{1}{5^n}, \text{ поэтому } R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{5^n(n+1)} < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{5^{N+1}}.$$

Потребуем, чтобы $\frac{1}{5^{N+1}} \leq \varepsilon = 0,01$, тогда $N \geq 2$. Следовательно, для достижения указанной точности достаточно взять два слагаемых в частичной сумме:

$$S\left(7 + \frac{3}{5}\right) \approx S_2\left(7 + \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{10} + \frac{1}{5^2 \cdot 3} = 0,22.$$

Для второго (знакочередующегося) ряда оценка остатка ряда может быть проведена так же с помощью ряда геометрической прогрессии (хотя может быть использована и теорема Лейбница, см. С. 43).

$$|R_N| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n(n+1)} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{5^n(n+1)} \leq \frac{1}{5^{N+1}}.$$

То есть для достижения точности 0,01 достаточно взять два слагаемых:

$$S\left(7 - \frac{3}{5}\right) \approx S_2\left(7 - \frac{3}{5}\right) = \frac{-1}{10} + \frac{1}{5^2 3} = 0,02 .$$

3). Найдем интервал сходимости по признаку Д'Аламбера: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x| < 1$. Если $|x| = 1$, то ряд расходится (по необходимому признаку сходимости). Итак, область определения функции $S(x)$ — интервал $-1 < x < 1$. Заметим, что для $x \neq 0$ верно равенство:

$$S(x) = -x^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n = -x^{-1} \overline{S(x)} .$$

Области определения $S(x)$ и $\overline{S(x)}$ совпадают. Вычислим сумму $\overline{S(x)}$. Для этого представим ряд в виде суммы рядов (также сходящихся на указанном интервале):

$$\overline{S(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n .$$

Первый ряд суммируем как ряд геометрической прогрессии: $\sum_{n=1}^{\infty} (-x)^n = \frac{-x}{1+x}$.

Второй ряд, как любой степенной, можно почленно проинтегрировать в области сходимости:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{n-1} = \frac{-1}{1+x} .$$

Но тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n = \int \frac{-1}{1+x} dx = -\ln(1+x) + C .$$

При подстановке $x = 0$ в левой части равенства получается 0, а в правой C , то есть $C = 0$. Мы нашли $\overline{S(x)} = \frac{-x}{1+x} - \ln(1+x)$. Но тогда $\forall x \neq 0$ и $|x| < 1$

$$S(x) = -x^{-1} \overline{S(x)} = -x^{-1} \left(\frac{-x}{1+x} - \ln(1+x) \right) = \frac{1}{1+x} + x^{-1} \ln(1+x) .$$

Заметим, что $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+x} + x^{-1} \ln(1+x) \right) = 1$ и $S(0) = 1$, то есть функция $S(x)$ определена и непрерывна на интервале $(-1, 1)$.

2.2.4. Разложение функций в степенные ряды

Рядом Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 называется ряд

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

При $x_0 = 0$ получается ряд *Маклорена*. Если ряд Тейлора для функции $f(x)$ сходится к ней, то говорят, что функция *разложима* в ряд Тейлора.

Теорема 2.13 (о единственности разложения в степенной ряд)

Пусть

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots,$$

где стоящий справа ряд сходится в некоторой окрестности точки x_0 к функции $f(x)$. Тогда этот ряд является рядом Тейлора, то есть

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

★ Сформулированная теорема утверждает, что найти разложение функции $f(x)$ в степенной ряд, значит, найти разложение в ряд Тейлора. Но для нахождения коэффициентов ряда Тейлора, необходимо уметь вычислять n -ю производную функции $f(x)$ в указанной точке x_0 для любого n . Часто эта задача трудна. Но есть другой способ: использовать уже готовые стандартные разложения простейших функций в ряд Маклорена (см. приложение, приведенное на С. 74).

Пример. Разложить функции в ряд Тейлора.

1) $f(x) = \frac{9x}{20 - x - x^2}$ а) по степеням x , б) по степеням $(x + 1)$;

2) $f(x) = x \sin^2 x + 1$ а) по степеням x , б) по степеням $(x - \frac{\pi}{4})$;

3) $f(x) = x^2 \sqrt{4 - 5x}$ по степеням x .

Решение. 1а). Для разложения этой дроби в ряд Маклорена представим ее в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{9x}{20 - x - x^2} = -x \frac{9}{(x - 4)(x + 5)} = -x \left(\frac{1}{x - 4} - \frac{1}{x + 5} \right).$$

Каждую простейшую дробь подготовим к применению стандартного ряда геометрической прогрессии: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, $|q| < 1$.

$$\frac{1}{x-4} = \frac{1}{(-4)(1-\frac{x}{4})} = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n, \quad \left|\frac{x}{4}\right| < 1;$$

$$\frac{1}{x+5} = \frac{1}{5(1-(-\frac{x}{5}))} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{5^n}, \quad \left|\frac{x}{5}\right| < 1.$$

В общей части области сходимости $|x| < 4$ верны равенства

$$\frac{9x}{20-x-x^2} = x \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4^n} + x \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{5^{n+1}} \right) x^{n+1}.$$

В итоге получен ряд Маклорена для исходной функции.

1б). Чтобы применить стандартные разложения (по степеням x), сделаем замену $y = x + 1$ (то есть $x = y - 1$) в функции:

$$f(y) = \frac{9(y-1)}{20-(y-1)-(y-1)^2} = \frac{9y-9}{20+y-y^2}.$$

Далее алгоритм тот же, что и в пункте а). Раскладываем дробь в сумму элементарных дробей:

$$\frac{9y-9}{20+y-y^2} = \frac{9y-9}{(5-y)(4+y)} = \frac{4}{5-y} + \frac{-5}{4+y}.$$

Каждое слагаемое раскладываем по степеням y , используя геометрическую прогрессию:

$$\frac{4}{5-y} = \frac{4}{5(1-\frac{y}{5})} = \frac{4}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{5^n}, \quad |y| < 5,$$

$$\frac{-5}{4+y} = \frac{-5}{4(1-(-\frac{y}{4}))} = -\frac{5}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^n}{4^n}, \quad |y| < 4.$$

В области сходимости $|y| < 4$ получаем:

$$\frac{9y-9}{20+y-y^2} = \frac{4}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{5^n} + \frac{-5}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^n}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1} 5}{4^{n+1}} \right) y^n.$$

Таким образом, после обратной замены получаем разложение первоначальной функции по степеням $x + 1$ в области $|x + 1| < 4$:

$$\frac{9x}{20-x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1} 5}{4^{n+1}} \right) (x+1)^n.$$

2а). Сначала запишем функцию в более удобном виде:

$$f(x) = x \sin^2 x + 1 = \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \cos 2x + 1.$$

Сумма $\frac{x}{2} + 1$ уже состоит из степеней x . Для разложения функции $\cos 2x$ воспользуемся стандартным разложением: $\cos y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!}$, $y \in \mathbb{R}$. В нашем случае $y = 2x$, поэтому для $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \cos 2x + 1 = \frac{x}{2} + 1 - \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n+1}}{(2n)!}.$$

2б). Для разложения по степеням $(x - \frac{\pi}{4})$ вновь сделаем замену переменной: $y = x - \frac{\pi}{4}$. Тогда раскрываем скобки и используем формулу приведения:

$$f(y) = \frac{y + \frac{\pi}{4}}{2} + 1 - \frac{(y + \frac{\pi}{4})}{2} \cos 2(y + \frac{\pi}{4}) = \frac{y}{2} + \frac{\pi}{8} + 1 + \frac{y}{2} \sin 2y + \frac{\pi}{8} \sin 2y.$$

Далее применим стандартное разложение $\sin 2y$

$$f(y) = \frac{y}{2} + \frac{\pi}{8} + 1 + \frac{y}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2y)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{\pi}{8} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2y)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

и сгруппируем слагаемые по одинаковым степеням y :

$$f(y) = \frac{\pi}{8} + 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) y + y^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{4} y^{2n+1} + y^{2n+2}\right).$$

Итак, после обратной замены получим для $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\pi}{8} + 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{4} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1} + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+2}\right).$$

3). В этой задаче применим стандартное разложение

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad |x| < 1$$

для $\alpha = \frac{1}{2}$. Подсчитаем коэффициенты ряда для $n \geq 1$:

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3).$$

Преобразуем функцию и используем известное разложение:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \sqrt{4 - 5x} = 2x^2 \sqrt{1 + \left(-\frac{5x}{4}\right)} = \\ &= 2x^2 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!} 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3) \left(-\frac{5x}{4}\right)^n \right) = \\ &= 2x^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n 2}{8^n n!} 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3) x^{n+2} \quad \text{для } |x| < \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

2.2.5. Применение рядов Тейлора

I. Вычисление значений функций. Если функция $f(x)$ в окрестности точки x_0 разложена в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, то для точки x_1 из области сходимости ряда $f(x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_1 - x_0)^n$. Таким образом, для вычисления значения функции нужно вычислить сумму числового ряда. Приемы оценки остатка ряда и примеры рассмотрены на С. 45.

Пример. Вычислить $\frac{1}{\sqrt{e}}$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

Решение. Для функции $f(x) = e^x$ имеем $\frac{1}{\sqrt{e}} = f(-\frac{1}{2})$. Ряд Маклорена для этой функции имеет вид: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$. Поскольку $-\frac{1}{2}$ содержится в области сходимости, то верно равенство

$$e^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!}.$$

Оценим остаток знакопередающегося числового ряда (см. С. 43, теорема 2.9):

$$|R_N| \leq u_{N+1} = \frac{1}{2^{N+1} (N+1)!} \leq 0,01.$$

Из неравенства находим $N \geq 3$. Окончательно получим

$$e^{-\frac{1}{2}} \approx \sum_{n=0}^3 \frac{(-1)^n}{2^n n!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16} - \frac{1}{48} \approx 0,542.$$

Алгоритм обеспечивает один верный знак после запятой.

II. Вычисление интегралов. Разложение функции в степенной ряд позволяет интегрировать функцию, почленно интегрируя ее ряд в области

сходимости (независимо от того, возможно ли найти первообразную исходной функции).

Пример. Вычислить приближенное значение интеграла $\int_{0,2}^{0,5} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$. Указать число членов ряда, взятых в частичную сумму для достижения нужной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Решение. Заметим сначала, что подынтегральная функция не определена в точке $x_0 = 0$, но предел в этой точке существует и равен 1. Доопределив функцию в нуле значением ее предела, получим непрерывную дифференцируемую бесконечное число раз функцию с непрерывными и ограниченными производными. Значит, в окрестности $x_0 = 0$ подынтегральная функция раскладывается в ряд Тейлора. Найдем этот степенной ряд с помощью стандартного разложения $\ln(1+y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{n+1}}{n+1}$, $y \in (-1; 1)$. Положим $y = x^2$, тогда

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2(n+1)}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n+1}, x \in (-1; 1).$$

Теперь, учитывая, что промежуток интегрирования находится в области сходимости, находим интеграл

$$\int_{0,2}^{0,5} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx = \int_{0,2}^{0,5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0,2}^{0,5} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n+1} dx.$$

Мы свели задачу к вычислению первообразной степенной функции и приближенному вычислению сумм двух числовых рядов:

$$\begin{aligned} \int_{0,2}^{0,5} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(n+1)(2n+1)} \Big|_{0,2}^{0,5} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(0,5)^{2n+1}}{(n+1)(2n+1)} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(0,2)^{2n+1}}{(n+1)(2n+1)}. \end{aligned}$$

Оба числовых ряда — знакочередующиеся ряды Лейбница. Согласно теореме Лейбница, количество слагаемых $N = 2$ в частичной сумме для первого ряда находим из неравенства

$$\frac{(0,5)^{2(N+1)+1}}{((N+1)+1)(2(N+1)+1)} < 10^{-3}.$$

Для второго ряда аналогичное неравенство

$$\frac{(0,2)^{2(N+1)+1}}{((N+1)+1)(2(N+1)+1)} < 10^{-3}$$

дает значение $N = 1$. Таким образом, с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ получаем

$$\int_{0,2}^{0,5} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx \approx \sum_{n=0}^2 \frac{(-1)^n (0,5)^{2n+1}}{(n+1)(2n+1)} - \sum_{n=0}^1 \frac{(-1)^n (0,2)^{2n+1}}{(n+1)(2n+1)} \approx 0,121.$$

В ответе гарантированы два верных знака после запятой.

III. Решение дифференциальных уравнений. Решение многих нетривиальных дифференциальных уравнений можно найти в виде ряда. Например в виде ряда Тейлора (или его частичной суммы). Метод последовательного дифференцирования применяется для дифференциальных уравнений (ДУ), разрешенных относительно старшей производной, при наличии начальных условий.

Пример. Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y' = y^2 + x^3$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$. Найти пять членов ряда.

Решение. Поскольку начальное условие задано в нуле, ищем решение в виде ряда Маклорена:

$$y(x) = y(0) + y'(0)\frac{x}{1!} + y''(0)\frac{x^2}{2!} + y'''(0)\frac{x^3}{3!} + y^{IV}(0)\frac{x^4}{4!} + \dots$$

Первое слагаемое находим из начального условия: $y(0) = 1$. Далее, из ДУ $y'(0) = y^2(0) + 0 = 1$.

Дифференцируем ДУ, учитывая, что $y^2(x)$ — сложная функция:

$y'' = 2yy' + 3x^2$. Подставляем $x = 0$: $y''(0) = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0^2 = 2$. И так далее:

$y''' = 2y'y' + 2yy'' + 6x$, $y'''(0) = 6$;

$y^{IV} = 2(2y'y'' + yy''' + y'y'' + 3)$, $y^{IV}(0) = 0$.

Искомое решение ДУ в окрестности нуля:

$$y(x) \approx 1 + 1 \cdot x + \frac{2}{2!} x^2 + \frac{6}{3!} x^3 + \frac{30}{4!} x^4 = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{5}{4} x^4.$$

2.2.6. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти область сходимости рядов, исследовать их на абсолютную сходимость ($x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$).

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^x; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n+1}(z-4)^n}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}.$$

(Ответ: 1) абсолютно сходится на \mathbb{R} ; 2) сходится при $x \in (0, +\infty)$, абсолютно сходится при $x \in (1, +\infty)$; 3) абсолютно сходится в области $|z-4| < \frac{1}{2}$.)

2. Найти области сходимости и равномерной сходимости действительных рядов.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2}.$$

(Ответ: 1) равномерно сходится при $x \in \mathbb{R}$; 2) области сходимости и равномерной сходимости совпадают: $x \in [0, +\infty)$.)

3. Разложить функции в ряд Тейлора по степеням x .

$$1) \sin^2 x; \quad 2) \frac{3}{1+x-2x^2}; \quad 3) \ln(1+x-2x^2).$$

(Ответ: 1) $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + (-1)^n 2^{n+1}) x^n$, $|x| < \frac{1}{2}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{n-1}}{n} x^n$, $-\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}$.)

4. Вычислить интеграл с точностью 0,001:

$$\int_0^{0,3} \frac{\ln(1+t)}{t} dt.$$

(Ответ: 0,28.)

5. Найти первые 5 членов разложения решения ДУ в степенной ряд:

$$y'' = y \cos x + x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

(Ответ: $y(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{5x^6}{6!} + \dots$.)

2.3. Тригонометрические ряды Фурье

2.3.1. Разложение периодических функций

Если в каждой точке непрерывности функции $f(x)$ имеет место равенство

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x),$$

то функциональный ряд в правой части равенства называется *тригонометрическим рядом Фурье* функции $f(x)$, а сама функция называется *разложимой* в ряд Фурье.

Пусть $f(x)$ произвольная периодическая функция с периодом 2ℓ . Тогда возможность разложения ее в ряд Фурье и вид этого ряда описываются в двух следующих теоремах.

Теорема 2.14 (Дирихле)

Если $f(x)$ — 2ℓ -периодическая функция, кусочно непрерывная, кусочно монотонная и ограниченная на отрезке $[-\ell, \ell]$, то для некоторого набора коэффициентов a_n, b_n

1) в каждой точке непрерывности x_0 функции $f(x)$ верно равенство

$$f(x_0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x_0 + b_n \sin n\omega x_0);$$

2) в каждой точке x_0 разрыва функции $f(x)$ сумма ряда Фурье $S(x)$ равна среднему арифметическому пределов функции слева и справа, т.е.

$$S(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0));$$

3) ряд Фурье функции $f(x)$ можно почленно интегрировать.

Теорема 2.15 (о коэффициентах ряда Фурье)

Если функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, то коэффициенты ее ряда Фурье вычисляются по формулам:

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos n\omega x dx, \quad n \geq 1;$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin n\omega x dx, \quad n \geq 1;$$

$$a_0 = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx.$$

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\pi; 0), \\ 2, & x \in [0; \pi) \end{cases}$ с периодом $T = 2\ell = 2\pi$.

Решение. Заметим, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, значит, раскладывается в тригонометрический ряд Фурье. Подсчитаем коэффициенты Фурье.

Круговая частота $\omega = \frac{\pi}{\ell} = 1$, поэтому по формулам из теоремы 2.15 имеем

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 1 \cdot \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} 2 \cdot \cos nx \, dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^0 + 2 \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} \right] = 0. \end{aligned}$$

Отдельно вычислим нулевой коэффициент Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^0 1 \, dx + \int_0^{\pi} 2 \, dx \right] = \frac{3}{2}.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 1 \cdot \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} 2 \cdot \cos nx \, dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^0 - 2 \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} + \frac{\cos \pi n}{n} - 2 \frac{\cos \pi n}{n} + \frac{2}{n} \right] = \frac{1 - \cos \pi n}{\pi n} = \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad \text{если } n = 2k, \\ \frac{2}{\pi n} & , \quad \text{если } n = 2k + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Итак, b_n отличны от нуля лишь при нечетных номерах $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, что компактно записывается, при введении вместо n нового индекса суммирования k .

Таким образом, ряд Фурье принимает вид:

$$f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k+1)} \sin(2k+1)x.$$

Напомним, что знак равенства между функцией $f(x)$ и суммой ряда Фурье для нее можно поставить в точках непрерывности $f(x)$. В точках разрыва x_0 сумма ряда равна $\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$ — полусумме ординат слева и справа от точек разрыва. График суммы ряда Фурье представлен на рис. 2.1.

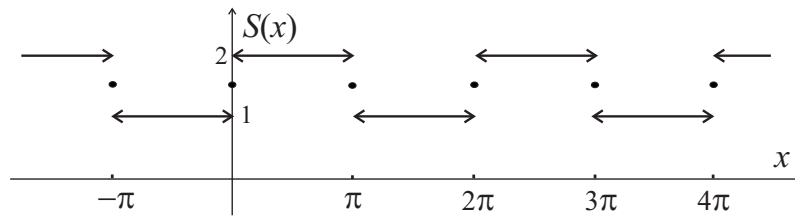


Рис. 2.1. График суммы ряда Фурье (совпадает с графиком раскладываемой функции всюду, кроме точек разрыва)

2.3.2. Разложение четных и нечетных периодических функций

I. Функция $f(x)$ — ч е т н а я, 2ℓ -периодическая. Тогда, используя свойства интегралов от четных и нечетных функций, имеем

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos n\omega x \, dx \text{ для } n \geq 0; \quad b_n = 0 \text{ для } n \geq 1.$$

Итак, ряд Фурье для четной функции не содержит синусов:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x.$$

II. Функция $f(x)$ — н е ч е т н а я, 2ℓ -периодическая. Тогда

$$a_n = 0 \text{ для } n \geq 0; \quad b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin n\omega x \, dx \text{ для } n \geq 1.$$

И ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega x.$$

П р и м е р. Разложить периодические с периодом $T = 2\pi$ функции в ряд Фурье:

1) $f_1(x) = x$, $x \in (-\pi, \pi)$; 2) $f_2(x) = |x|$, $x \in (-\pi, \pi)$.

1). Функция $f_1(x)$ нечетная периодическая, частота $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$. Все коэффициенты при косинусах обратятся в нуль: $a_n = 0$. Вычисляем коэффициенты при синусах:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_1(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = -2 \frac{\cos \pi n}{n} = -\frac{2}{n} (-1)^n = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}.$$

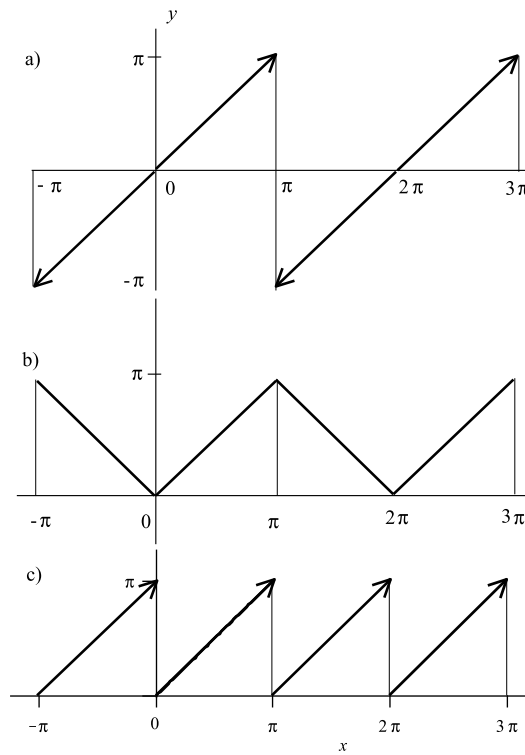


Рис. 2.2. Графики сумм рядов Фурье для нечетной функции $f_1(x)$ (а), четной функции $f_2(x)$ (б) и для функции общего вида $f(x)$ (с)

Итого, ряд Фурье имеет вид:

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

График суммы ряда представлен на рис. 2.2, а). Для всех значений x , за исключением точек разрыва, сумма ряда Фурье совпадает со значениями $f_1(x)$.

2). Для четной функции $f_2(x)$ период $T = 2\pi$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$. Все коэффициенты при синусах равны нулю: $b_n = 0$. Коэффициенты при косинусах

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_2(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \begin{cases} 0 & , \text{ если } n = 2k, \\ -\frac{4}{\pi n^2} & , \text{ если } n = 2k + 1, \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Итого, ряд Фурье имеет вид:

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)x.$$

График суммы ряда представлен на рис. 2.2, б). Во всех точках, кроме точек разрыва, сумма ряда Фурье совпадает со значениями $f_2(x)$.

2.3.3. Разложение неперiodических функций

Функция $f(x)$ — неперiodическая, определенная на конечном интервале. Тогда возможны следующие случаи:

- 1) $f(x)$ задана на $[a, b]$. Можно построить перiodическую с перiodом $T = b - a$ функцию, совпадающую с $f(x)$ на интервале $[a, b]$.
- 2) $f(x)$ задана на $[0, \ell]$. В этом случае для перiodического продолжения появляются несколько возможностей:

- поступить согласно случаю 1);
- продолжить функцию ч е т н о, а затем перiodически. Тогда перiod новой функции $T = 2\ell$, в ряд Фурье войдут только косинусы;
- продолжить функцию н е ч е т н о, а затем перiodически. Перiod новой функции $T = 2\ell$, в ряд войдут только синусы.

П р и м е р. Разложить функцию $f(x) = x$, $x \in [0, \pi)$, в ряд Фурье

а) по синусам; б) по косинусам; в) продолжив перiodически как функцию общего вида.

Р е ш е н и е. а). Доопределим функцию на интервале $(-\pi; \pi)$ нечетным образом и продолжим ее перiodически с перiodом $T = 2\pi$. Тогда получим в точности $f_1(x)$ из предыдущего примера (С. 64). Разложение в ряд Фурье нечетной функции не содержит косинусов. Итак, получено нужное разложение в ряд Фурье по синусам и для всякого $x \in [0, \pi)$ сумма ряда совпадает с $f(x) = x$:

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

б). Вновь доопределим функцию на интервале $(-\pi; \pi)$ четным образом и, продолжив перiodически, получим $f_2(x)$ из предыдущего примера (С. 64). Для $f_2(x)$ получено разложение по косинусам кратных дуг и для всякого $x \in [0, \pi)$ сумма ряда совпадает с $f(x) = x$:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)x.$$

в). Функцию $f(x) = x$, $x \in [0, \pi)$, продолжаем перiodически на всю действительную ось с перiodом $T = \pi$. Тогда полуперiod $\ell = \frac{\pi}{2}$, частота $\omega = \frac{\pi}{\ell} = 2$.

Полученное продолжение не является ни четной ни нечетной функцией. Значит, разложение содержит ненулевые коэффициенты и при косинусах и при синусах кратных дуг. Вычислим их:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos 2nx dx = 0, \quad a_0 = \frac{\pi}{2}, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin 2nx dx = -\frac{1}{n}.$$

В результате имеем ряд Фурье

$$\frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 2nx.$$

График суммы ряда представлен на рис. 2.2, с).

2.3.4. Вычисление сумм числовых рядов

★ Вычислить сумму числового ряда можно приближенно (см. С. 45) и точно. Для точного вычисления используем разложения функций в ряд Тейлора (см. пример на С. 58) или в ряд Фурье.⁴ При этом можно использовать уже известные разложения (см. приложения, приведенные на С.74).

Пример. Найти суммы числовых рядов:

$$1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}; \quad 2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \sin 3k}{k}.$$

Решение 1). Используем полученное на С.65 разложение

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)x.$$

При $x = \pi$ имеем:

$$f(\pi) = \pi = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \underbrace{\cos(2k+1)\pi}_{=-1},$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

⁴Заметим, что точно вычислить сумму можно и по определению, см. пример 2 на С. 37.

2). Для второго ряда используем табличное разложение в ряд Фурье функции $f(x) = x, -\pi < x < \pi$ (см. приложение на С.74):

$$x = 2 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1} \sin nx}{n} + \dots \right), \quad -\pi < x < \pi .$$

При $x = 3$ имеем

$$f(3) = 3 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \sin 3k}{k},$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \sin 3k}{k} = \frac{3}{2}.$$

2.3.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Разложить периодическую с периодом T функцию $f(x)$ в ряд Фурье, найти значения $S(x_i)$ суммы полученного ряда в заданных точках x_1, x_2 .

1) $f(x) = 10 - x, x \in (5, 15), T = 10, x_1 = 15, x_2 = 20;$

2) $f(x) = x^2, x \in (-\pi, \pi), T = 2\pi, x_1 = 0, x_2 = 2\pi;$

3) $f(x) = \begin{cases} -1, & -3 < x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq 3; \end{cases} T = 6, x_1 = 0, x_2 = -3.$

(Ответ: 1) $\frac{10}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{5}, S(15) = S(20) = 0;$

2) $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, S(0) = 0, S(2\pi) = \frac{\pi^2}{8};$

3) $\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{3}, S(0) = S(-3) = 0.)$

2. Используя разложения в тригонометрический ряд Фурье, найти суммы числовых рядов.

$$1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad 2) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(4n+1)^2(4n+3)^2}.$$

(Ответ: 1) $\frac{\pi}{4}, 2) \frac{\pi^2}{32\sqrt{2}}.$)

Библиографический список

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. М.: Физматгиз, 1959. 468 с.
2. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.М. Матвеев. М.: Высш. шк., 1967. 564 с.
3. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. М.: Наука, 1969. 424 с.
4. Карташев А.П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления / А.П. Карташчв, Б.Л. Рождественский. М.: Наука, 1976. 256 с.
5. Бибииков Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Н. Бибииков. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. 232 с.
6. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М.В. Федорюк. М.: Наука, 1985. 448 с.
7. Бугров Я.С. Высшая математика: Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. М.: Наука, 1985. 464 с.
8. Богданов Ю.С. Курс дифференциальных уравнений / Ю.С. Богданов, С.А. Мазаник, Ю.Б. Сыроид. Минск: Універсітэцкае, 1996. 288 с.
9. Матвеев Н.М. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Н.М. Матвеев. СПб.: Специальная литература, 1996. 372 с.
10. Тихонов А.Н. Дифференциальные уравнения / А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. М.: Наука. ФИЗМАТЛИТ, 1998. 232 с.
11. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М.Л. Краснов. М.: Высш. шк., 1983. 128 с.
12. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений / А.Ф. Филиппов. М.: Эдиториал УРСС, 2004. 240 с.
13. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. М.: Наука, 1976. 576 с.
14. Боярчук А.К. Справочное пособие по высшей математике. Т.5: Дифференциальные уравнения в примерах и задачах / А.К. Боярчук, Г.П. Головач. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 384 с.
15. Краснов М.Л. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. М.: Высш. шк., 1978. 288 с.
16. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов. М.: Наука, 1973. 128 с.
17. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Н.М. Матвеев. Минск: Вышэйшая школа, 1977. 416 с.
18. Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи / А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк. М.: Высш. шк., 1989, 384 с.
19. Альсевич Л.А. Практикум по дифференциальным уравнениям / Л.А. Альсевич, Л.П. Черенкова. Минск: Вышэйшая школа, 1990. 320 с.
20. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.1 / В.И. Смирнов. М.: Наука, 1974. 480 с.

21. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.2 / В.И. Смирнов. М.: Наука, 1965. 656 с.
22. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.II / Г.М. Фихтенгольц. М.: Наука, 1969. 800 с.
23. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3 / Г.М. Фихтенгольц. М.: Наука, 1969. 760 с.
24. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1 / Л.Д. Кудрявцев. М.: Высш. шк., 1988. 712 с.
25. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.2 / Л.Д. Кудрявцев. М.: Высш. шк., 1988. 576 с.
26. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.3 / Л.Д. Кудрявцев. М.: Высш. шк., 1989. 352 с.
27. Воробьев Н.Н. Теория рядов / Н.Н. Воробьев. М.: Наука, 1986. 408 с.
28. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, В.И. Шабунин. М.: Наука, 1986. 528 с.
29. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, В.И. Шабунин. СПб.: ИЧП «Кристалл», 1994. 496 с.
30. Ефимов А.В. Сборник задач по математике для втузов. Т.1: Линейная алгебра и основы математического анализа / А.В. Ефимов, Б.П. Демидович (ред.). М.: Наука, 1981. 464 с.
31. Ефимов А.В. Сборник задач по математике для втузов. Т.2: Специальные разделы математического анализа / А.В. Ефимов, Б.П. Демидович (ред.). М.: Наука, 1981. 368 с.
32. Справочное пособие по высшей математике. Т.1: Математический анализ: введение в анализ, производная, интеграл / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач. М.: Едиториал УРСС, 2001. 360 с.
33. Справочное пособие по высшей математике. Т.3: Математический анализ: кратные и криволинейные интегралы / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач. М.: Едиториал УРСС, 2001. 224 с.
34. Шмелев П.А. Теория рядов в задачах и упражнениях / П.А. Шмелев. М.: Высш. шк., 1983. 176 с.

Приложения

1. Типы ДУ первого порядка

Тип уравнения	Способ решения
ДУ с разделяющимися переменными $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$	Разделение переменных $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \text{ либо } g(y) = 0$
Однородные уравнения $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$	Замена $z(x) = \frac{y}{x}, y' = z'x + z$
Линейное ДУ $y' + P(x)y = Q(x)$	Замена $y = u(x)v(x), y' = u'v + uv'$
ДУ Бернулли $y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha$	Замена $y = u(x)v(x), y' = u'v + uv'$
Уравнение в полных дифференциалах $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0,$ если $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$	Восстановление функции $F(x, y)$ из системы $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y) \end{cases} F(x, y) = C \text{ — решение.}$

2. Типы ДУ второго порядка

Тип уравнения	Способ решения
$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x)$	Последовательное интегрирование $y = \int (\int f(x) dx) dx$
$F(x, y', y'') = 0$	Замена $y' = p(x), y'' = p'(x)$.
$F(y, y', y'') = 0$	Замена $y' = p(y), y'' = p'_y p$.
Однородное ДУ $F(x, y, y', y'') = 0$, если $F(x, ty, ty', ty'') = t^m F(x, y, y', y'')$	Замена $\frac{y'}{y} = z(x), y'' = y(z^2 + z')$.
ДУ в полных производных $\frac{d}{dx} G(x, y, y') = 0$	Сведение к ДУ 1-го порядка $G(x, y, y') = C_1$

3. Фундаментальные системы решений для ОЛДУ с постоянными коэффициентами

1. Корень характеристического уравнения \tilde{k} действительный кратности r ($r \geq 1$). Тогда в ФСР войдут функции $e^{\tilde{k}x}, x e^{\tilde{k}x}, x^2 e^{\tilde{k}x}, \dots, x^{r-1} e^{\tilde{k}x}$.

2. Среди корней характеристического уравнения имеется пара комплексно сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$, встречающаяся r раз, $r \geq 1$ (r -кратная пара корней). Тогда в фундаментальную систему решений войдут функции

$$\left. \begin{array}{l} e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad x e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad \dots, \quad x^{r-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad x e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad \dots, \quad x^{r-1} e^{\alpha x} \sin \beta x \end{array} \right\} \text{ (всего } 2r \text{ функций).}$$

Количество функций в ФСР равно порядку дифференциального (и характеристического) уравнения.

3. Подбор частного решения НЛДУ с постоянными коэффициентами по виду правой части

Правая часть ДУ	Вид частного решения
$P_k(x)$ — многочлен степени k	$x^s R_k(x)$, где $\mathbf{r} = 0$ — корень характеристического уравнения кратности $s, s \geq 0$
$P_k(x)e^{\alpha x}$; $P_k(x)$ — многочлен степени k	$x^s R_k(x)e^{\alpha x}$, где $\mathbf{r} = \alpha$ — корень характеристического уравнения кратности $s, s \geq 0$
$P_k(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x$, $P_k(x), Q_n(x)$ — многочлены степени k и n	$x^s (R_m(x) \cos \beta x + T_m(x) \sin \beta x)$, где $\mathbf{r} = i\beta$ — корень характеристического уравнения кратности $s, s \geq 0$, $m = \max\{k, n\}$
$(P_k(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x)e^{\alpha x}$; $P_k(x), Q_n(x)$ — многочлены степени k и n	$x^s (R_m(x) \cos \beta x + T_m(x) \sin \beta x)e^{\alpha x}$, где $\mathbf{r} = \alpha + i\beta$ — корень характеристического уравнения кратности $s, s \geq 0$, $m = \max\{k, n\}$

$R_m(x), T_m(x), R_k(x)$ — многочлены с неопределенными коэффициентами соответствующей степени.

4. Фундаментальные системы решений для ЛДУ Эйлера

Для уравнения n -го порядка ФСР состоит из n функций, причем каждому корню кратности r характеристического уравнения соответствует r функций — элементов ФСР уравнения Эйлера.

1. k — действительный корень кратности r , тогда ему соответствуют r функций:

$$x^k, x^k \ln x, x^k \ln^2 x, \dots, x^k \ln^{r-1} x.$$

2. $k = \alpha \pm i\beta$ — r -кратная пара комплексно-сопряженных корней, тогда этой паре соответствует $2r$ функций:

$$x^\alpha \cos(\beta \ln x), x^\alpha \cos(\beta \ln x) \ln x, x^\alpha \cos(\beta \ln x) \ln^2 x, \dots, x^\alpha \cos(\beta \ln x) \ln^{r-1} x, \\ x^\alpha \sin(\beta \ln x), x^\alpha \sin(\beta \ln x) \ln x, x^\alpha \sin(\beta \ln x) \ln^2 x, \dots, x^\alpha \sin(\beta \ln x) \ln^{r-1} x.$$

5. Разложение простейших функций в ряд Маклорена

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, x \in \mathbb{R};$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, x \in \mathbb{R};$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, x \in \mathbb{R};$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, x \in \mathbb{R};$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, x \in \mathbb{R};$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots, x \in (-1; 1);$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots, x \in (-1; 1);$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, x \in [-1; 1].$$

6. Разложение некоторых функций в тригонометрический ряд Фурье

$$x = 2 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1} \sin nx}{n} + \dots \right), \quad -\pi < x < \pi;$$

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots + \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \dots \right), \quad -\pi < x < \pi;$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} \cos nx}{n^2} + \dots \right), \quad -\pi < x < \pi;$$

$$f(x) = \begin{cases} -a, & -\pi < x < 0, \\ a, & 0 < x < \pi, \end{cases} \quad f(x) = \frac{4a}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + \dots \right);$$

$f(x) = x(\pi - x)$ при $0 \leq x \leq \pi$ и нечетно продолжена на $(-\pi, 0)$, тогда

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \dots + \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3} + \dots \right).$$

Оглавление

Глава 1. Дифференциальные уравнения	3
1.1. Дифференциальные уравнения первого порядка	3
1.1.1. Уравнения с разделяющимися переменными	4
1.1.2. Однородные уравнения	6
1.1.3. Линейные уравнения и уравнения Бернулли	8
1.1.4. Уравнения в полных дифференциалах	11
1.1.5. Задачи для самостоятельного решения	14
1.2. Дифференциальные уравнения высших порядков.	14
1.2.1. Уравнения вида $\frac{d^n}{dx^n}y(x) = f(x)$	15
1.2.2. Уравнения, не содержащие искомого функцию	16
1.2.3. Уравнения, не содержащие свободную переменную x	18
1.2.4. Однородные уравнения высших порядков	19
1.2.5. Выделение полной производной в ДУ высших порядков	21
1.2.6. Задачи для самостоятельного решения	22
1.3. Линейные дифференциальные уравнения	22
1.3.1. ЛДУ с переменными коэффициентами	24
1.3.2. Решение НЛДУ методом Лагранжа	25
1.3.3. ОЛДУ с постоянными коэффициентами	26
1.3.4. НЛДУ с постоянными коэффициентами	29
1.3.5. Уравнение Эйлера	32
1.3.6. Задачи для самостоятельного решения	33
Глава 2. Ряды	35
2.1. Числовые ряды	35
2.1.1. Определение и вычисление суммы ряда	35
2.1.2. Признаки сходимости знакоположительных рядов	38
2.1.3. Знакопеременные и комплексные ряды	43
2.1.4. Приближенное вычисление сумм числовых рядов	45
2.1.5. Задачи для самостоятельного решения	47
2.2. Функциональные ряды	48
2.2.1. Область сходимости функционального ряда	48
2.2.2. Равномерная сходимость функционального ряда	50
2.2.3. Степенные ряды	51
2.2.4. Разложение функций в степенные ряды	55
2.2.5. Применение рядов Тейлора	58
2.2.6. Задачи для самостоятельного решения	60
2.3. Тригонометрические ряды Фурье	61
2.3.1. Разложение периодических функций	61
2.3.2. Разложение четных и нечетных периодических функций	64
2.3.3. Разложение непериодических функций	66
2.3.4. Вычисление сумм числовых рядов	67
2.3.5. Задачи для самостоятельного решения	68
Библиографический список	69
Приложения	71

Учебное издание

Голикова Елена Александровна
Соболева Анастасия Сергеевна

Дифференциальные уравнения и ряды в примерах и задачах

Редактор *Н.П.Кубыщенко*
Компьютерная верстка *Е.А.Голикова*

Подписано в печать		Формат 60x84 1/16
Бумага типографская	Плоская печать	Усл. печ. л. 4,36
Уч.-изд. л. 4,2	Тираж 200 экз.	Заказ

Редакционно-издательский отдел УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19
Отпечатано в отделении полиграфии ИВТОБ
620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19, ауд. И-120
тел. (343)-375-41-43