Министерство образования и науки Российской Федерации
ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет − УПИ»

Одинцова Н.Ю., Трещева В.В.

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

**Учебное пособие
для студентов физико-технического факультета**

Научный редактор – доц., канд. физ.-мат. наук А. В. Зенков

Екатеринбург
2006

УДК 512/514(075.8)
ББК 22.14+22.151.5я78
О 42

Рецензенты:
кафедра математики Уральского государственного горного университета (зав. кафедрой проф., д-р физ.-мат. наук В. Б. Сурнев);
проф., д-р физ.-мат. наук В. Б. Репницкий (Уральский государственный университет им. А. М. Горького, кафедра алгебры и дискретной математики)

Авторы: Н. Ю. Одинцова, В. В. Трещева

0 42 Руководство к решению задач по алгебре и аналитической геометрии: учебное пособие/Н. Ю. Одинцова, В. В. Трещева. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2006. 75 с.

ISBN 5–321–00552–4

Учебное пособие предназначено для студентов физико-технического факультета. В пособии разбирается решение типовых задач по следующим вопросам: векторная алгебра, аналитическая геометрия, комплексные числа, определители и матрицы, системы линейных уравнений. Приведены индивидуальные задания.

Библиогр.: 6 назв. Рис. 56.

Подготовлено кафедрой «Вычислительные методы и уравнения математической физики» при содействии физико-технического факультета

УДК 512/514(075.8)
ББК 22.14+22.151.5я78

ISBN 5–321–00552–4

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Векторная алгебра

1.1. Линейные операции с векторами

Перед решением задач по данной теме необходимо вспомнить основные понятия векторной алгебры: определение вектора, суммы (разности) векторов, умножения вектора на число, базиса на плоскости (R^2) и в пространстве (R^3), разложение вектора по базису, действия с векторами, заданными координатами.

Пример 1. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы имели место следующие соотношения:

1) $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$; 2) $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|>\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$; 3) $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|<\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$?

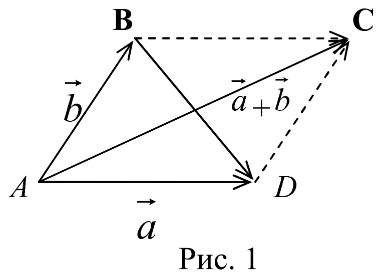


Рис. 1

Решение. По определению суммы (разности) векторов векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ направлены по диагоналям параллелограмма *ABCD*, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Длины векторов $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ равны длинам соответствующих диагоналей $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\overline{AC}\right|$, $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\left|\overline{BD}\right|$ (рис. 1).

1). По условию $AC=BD \Rightarrow ABCD-$ прямоугольник, следовательно, $\vec{a}\perp\vec{b}$.

2). По условию $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|>\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$, тогда $\angle BAD>\dfrac{\pi}{2}$, т.е. $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$ – тупой.

3). Аналогично, при выполнении условия $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|<\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ угол $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)<\dfrac{\pi}{2}$ – острый.

Пример 2. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы вектор $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ делил угол между векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ пополам?

Решение. По свойству диагоналей ромба, $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$.

Пример 3. Два вектора $\vec{a}=\{2;-3;\,6\}$, $\vec{b}=\{-1;2;-2\}$ приложены к одной точке. Определить координаты вектора $\vec{c}$, направленного по биссектрисе угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\left|\vec{c}\right|=3\sqrt{42}$.

Решение. Найдем единичные векторы (орты) $\vec{a}^{\circ}$, $\vec{b}^{\circ}$ (рис.2):

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{4+9+36}=7;\quad \vec{a}^{\circ}=\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}=\left\{\frac{2}{7};-\frac{3}{7};\frac{6}{7}\right\};$$

$$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{1+4+4}=3;\quad \vec{b}^{\circ}=\frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=\left\{-\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right\}.$$

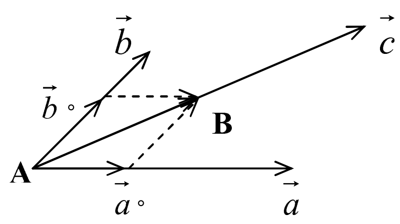


Рис. 2

Определим координаты вектора

$$\overline{AB}=\vec{a}^{\circ}+\vec{b}^{\circ}=\left\{\frac{2}{7}-\frac{1}{3};-\frac{3}{7}+\frac{2}{3};\frac{6}{7}-\frac{2}{3}\right\}=\left\{-\frac{1}{21};\frac{5}{21};\frac{4}{21}\right\}.$$

Вектор $\vec{c}\uparrow\uparrow\overline{AB}$, следовательно, $\vec{c}=\lambda\,\overline{AB}=\lambda\left\{-\frac{1}{21};\frac{5}{21};\frac{4}{21}\right\}$, $\lambda>0$;

$\left|\vec{c}\right| = \dfrac{\lambda}{21}\sqrt{1+25+16} = \dfrac{\lambda}{21}\sqrt{42}$. Тогда $\dfrac{\lambda}{21}\sqrt{42} = 3\sqrt{42}$, $\lambda = 63$ и $\vec{c} = \{-3;\,15;\,12\}$.

Пример 4. Проверить, что точки $A(3;-1;\,2)$, $B(1;\,2;-1)$, $C(-1;\,1;-3)$, $D(3;-5;\,3)$ являются вершинами трапеции.

Решение. В трапеции основания параллельны, следовательно, векторы, соответствующие этим сторонам должны быть параллельны, а два других вектора не являются параллельными. Найдем следующие векторы:

$$\overrightarrow{AB} = \{-2;3;-3\},\ \overrightarrow{BC} = \{-2;-1;-2\},\ \overrightarrow{CD} = \{4;-6;6\},\ \overrightarrow{DA} = \{0;4;-1\}.$$

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ параллельны, т.к. $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$, векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$ не являются параллельными, поэтому точки A, B, C, D являются вершинами трапеции.

Пример 5. Векторы $\vec{a} = \{3;-2;\,1\}$, $\vec{b} = \{-1;\,1;-2\}$, $\vec{c} = \{2;\,1;-3\}$ составляют базис пространства R^3. Найти координаты вектора $\vec{q} = \{11;-6;\,5\}$ в этом базисе.

Решение. Пусть $\vec{q} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c}$, тогда числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — координаты $\vec{q}$ в базисе $\{\vec{a};\,\vec{b};\,\vec{c}\}$. Запишем уравнение в виде:

$$\begin{pmatrix}11\\-6\\5\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix},\ \text{или}\ \begin{cases}11 = 3\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3,\\ -6 = -2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,\\ 5 = \lambda_1 - 2\lambda_2 - 3\lambda_3.\end{cases}$$

Решим систему по правилу Крамера. Вычислим определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\-2 & 1 & 1\\1 & -2 & -3\end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix}1 & 1\\-2 & -3\end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix}-2 & 1\\1 & -3\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}-2 & 1\\1 & -2\end{vmatrix} = -3 + 5 + 6 = 8;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix}11 & -1 & 2\\-6 & 1 & 1\\5 & -2 & -3\end{vmatrix} = -33 - 5 + 24 - 10 + 22 + 18 = -48 + 64 = 16;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix}3 & 11 & 2\\-2 & -6 & 1\\1 & 5 & -3\end{vmatrix} = 54 + 11 - 20 + 12 - 15 - 66 = 77 - 101 = -24;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix}3 & -1 & 11\\-2 & 1 & -6\\1 & -2 & 5\end{vmatrix} = 15 + 6 + 44 - 11 - 36 - 10 = 65 - 57 = 8;$$

Тогда $\lambda_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 2$; $\lambda_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = -3$, $\lambda_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = 1$ и $\vec{q} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

1.2. Скалярное произведение

Пример 1. Считая, что каждый из векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ отличен от нуля, установить, при каком их взаимном расположении справедливо равенство $\left(\vec{a},\vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a}\left(\vec{b},\vec{c}\right)$.

Решение. Возможны 2 случая:

1) $\left(\vec{a},\vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a}\left(\vec{b},\vec{c}\right) = 0$. Так как векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - ненулевые, то из условий $\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 0$ и $\left(\vec{b},\vec{c}\right) = 0$ следует, что $\vec{a} \perp \vec{b}$ и $\vec{b} \perp \vec{c}$.

2) $\left(\vec{a},\vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a}\left(\vec{b},\vec{c}\right) \neq 0$. Так как $\left(\vec{a},\vec{b}\right)\vec{c} \parallel \vec{c}$, $\vec{a}\left(\vec{b},\vec{c}\right) \parallel \vec{a}$, то $\vec{c} \parallel \vec{a}$.

Пример 2. Даны вершины треугольника *ABC:*

$$A(5;-3;\,0),\ B(9;-12;-1),C(11;-6;\,2).$$

Найти угол φ при вершине *A* треугольника *ABC*.

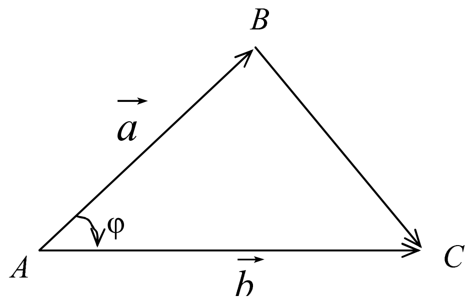


Рис. 3

Решение. Известно, что $\cos\varphi=\cos\left(\vec a\wedge\vec b\right)=\dfrac{\vec a\cdot\vec b}{\left|\vec a\right|\cdot\left|\vec b\right|}$;

Найдем $\vec a=\overrightarrow{AB}=\{4;-9;-1\}$, $\vec b=\overrightarrow{AC}=\{6;-3;2;\}$ (рис.3),

$\left|\vec a\right|=\sqrt{16+81+1}=\sqrt{98};\quad \left|\vec b\right|=\sqrt{36+9+4}=7$. Тогда

$$\cos\varphi=\frac{4\cdot6+(-9)\cdot(-3)+(-1)\cdot2}{\sqrt{98}\cdot7}=\frac{49}{7\sqrt{98}}=\frac{7}{7\sqrt2}=\frac{1}{\sqrt2},\quad \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

Пример 3. Из вершины *O* квадрата проведены прямые, делящие противоположные стороны пополам. Найти косинус угла между этими прямыми.

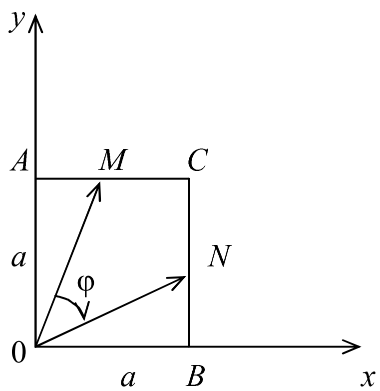


Рис.4

Решение. Выберем прямоугольную систему координат так, как показано на рис. 4. Пусть сторона квадрата равна *a*. Тогда точки A, B, M, N и векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ имеют следующие координаты:

$A(0;a)$, $B(a;0)$, $M\left(\dfrac a2;a\right)$, $N\left(a;\dfrac a2\right)$, $\overrightarrow{OM}=\left\{\dfrac a2;a\right\}$, $\overrightarrow{ON}=\left\{a;\dfrac a2\right\}$, и

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{ON}\right|}=\frac{\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^2}{2}}{\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+a^2}\cdot\sqrt{a^2+\dfrac{a^2}{4}}}=\frac{a^2}{\dfrac{a\sqrt5}{2}\cdot\dfrac{a\sqrt5}{2}}=\frac45.$$

Пример 4. Параллелограмм *OBCA* построен на векторах $\overrightarrow{OA}=\vec i-\vec j+2\vec k$ и $\overrightarrow{OB}=2\vec i-6\vec j+4\vec k$. Точка *M* – середина стороны *AC* (рис.5). Найти $\text{пр}_{\overline{OM}}\overrightarrow{OC}$.

Решение. Найдем векторы $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}=3\vec i-7\vec j+6\vec k$, или $\overrightarrow{OC}=\{3;-7;6\}$,

$\overline{OM}=\overline{OA}+\overline{AM}=\overline{OA}+\dfrac12\overline{AC}=\overline{OA}+\dfrac12\overline{OB}=2\vec i-4\vec j+4\vec k$, или $\overrightarrow{OM}=\{2;-4;4\}$.

Тогда $\text{пр}_{\overline{OM}}\overrightarrow{OC}=\dfrac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OM}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}=\dfrac{6+28+24}{\sqrt{4+16+16}}=\dfrac{58}{6}=\dfrac{29}{3}$.

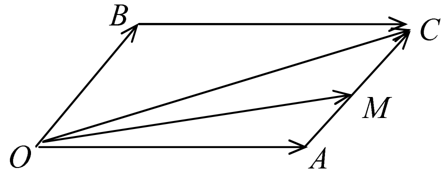


Рис.5

Пример 5. Найти вектор $\vec x$, коллинеарный вектору $\vec a=\{2;1;-1\}$ и удовлетворяющий условию $\vec x\cdot\vec a=18$.

Решение. Искомый вектор $\vec x$ коллинеарен вектору $\vec a$, следовательно, $\vec x=\lambda\vec a$.

По условию $\vec x\cdot\vec a=18$. Тогда $\vec x\cdot\vec a=\lambda\left(\vec a,\vec a\right)=\lambda\left|\vec a\right|^2=18\quad=>\quad\lambda=\dfrac{18}{\left|\vec a\right|^2}=\dfrac{18}{4+1+1}=3$.

Искомый вектор $\vec x=3\vec a=\{6;\,3;-3\}$.

Пример 6. Даны векторы $\vec{a}=\{1;0;-1\}$ и $\vec{b}=\{4;\sqrt{2};2\}$. Найти проекцию вектора $\vec{c}=6\vec{a}-\vec{b}$ на ось l, составляющую с координатными осями OX, OZ углы α=60°, γ=120°, а с осью OY острый угол β.

Решение. Пусть $\vec{l}^{\,0}$ — орт оси l. Тогда $\text{пр}_l\vec{c}=\text{пр}_{\vec{l}^0}\vec{c}$; $\vec{l}^{\,0}=\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}$;

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ => $\cos^2\beta=1-\cos^2\alpha-\cos^2\gamma$; $\cos^2\beta=1-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$;

$\cos\beta=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Так как $\beta<\dfrac{\pi}{2}$, то $\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и $\vec{l}^{\,0}=\left\{\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{\sqrt{2}};-\dfrac{1}{2}\right\}$;

$$\vec{c}=6\vec{a}-\vec{b}=\{2;-\sqrt{2};-8\},\quad \text{пр}_{\vec{l}^0}\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{l}^{\,0}=1-1+4=4.$$

Пример 7. Известно, что $|\vec{p}|=4$; $|\vec{q}|=2$ и $\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$. Вычислить длину вектора $\vec{a}=3\vec{p}-10\vec{q}$ и угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}=4\vec{p}+3\vec{q}$.

Решение. Так как $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$, то вычислим $\vec{a}\cdot\vec{a}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\left(3\vec{p}-10\vec{q}\right)\cdot\left(3\vec{p}-10\vec{q}\right)=9|\vec{p}|^2+100|\vec{q}|^2-60\left(\vec{p},\vec{q}\right)=9\cdot16+100\cdot4-60\cdot4\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=784.$$

Тогда $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{784}=28$. Итак, $|\vec{a}|=28$.

Для вычисления угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определим

$$|\vec{b}|=\sqrt{\left(\vec{b},\vec{b}\right)}=\sqrt{16|\vec{p}|^2+9|\vec{q}|^2+24\left(\vec{p},\vec{q}\right)}=\sqrt{16\cdot16+9\cdot4+24\cdot4\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{196}=14;$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(3\vec{p}-10\vec{q}\right)\cdot\left(4\vec{p}+3\vec{q}\right)=12|\vec{p}|^2-30|\vec{q}|^2+9\left(\vec{p},\vec{q}\right)-40\left(\vec{p},\vec{q}\right)=12\cdot16-30\cdot4-31\cdot2\cdot4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=196.$$

Тогда $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{196}{28\cdot14}=\dfrac{1}{2}$ и $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$.

Пример 8. Найти угол между векторами $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$, если $|\vec{l}_1|=3$, $|\vec{l}_2|=1$, а векторы $\vec{a}=\vec{l}_1+4\vec{l}_2$ и $\vec{b}=5\vec{l}_1-6\vec{l}_2$ перпендикулярны.

Решение. Так как $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, т.е.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(\vec{l}_1+4\vec{l}_2\right)\cdot\left(5\vec{l}_1-6\vec{l}_2\right)=5|\vec{l}_1|^2+14\left(\vec{l}_1,\vec{l}_2\right)-24|\vec{l}_2|^2=5\cdot9+14\left(\vec{l}_1,\vec{l}_2\right)-24\cdot1=21+14\left(\vec{l}_1,\vec{l}_2\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(\vec{l}_1,\vec{l}_2\right)=-\frac{3}{2};\ \cos\left(\widehat{\vec{l}_1,\vec{l}_2}\right)=\frac{\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2}{|\vec{l}_1|\cdot|\vec{l}_2|}=\frac{-3}{2\cdot3\cdot1}=-\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \left(\widehat{\vec{l}_1,\vec{l}_2}\right)=\frac{2\pi}{3}.$$

Пример 9. Найти проекцию вектора $\vec{p}=2\vec{a}-\vec{b}$ на вектор $\vec{q}=\vec{a}+\vec{b}$, если

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1,\quad \left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=120^\circ.$$

Решение. Вычислим скалярное произведение $\left(\vec{p},\vec{q}\right)$:

$$\left(\vec{p},\vec{q}\right)=\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=2\vec{a}^{\,2}-\vec{b}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^{\,2}=2|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2=2+1\cdot1\cdot\cos120^\circ-1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Найдём $\left|\vec{q}\right|$: $\left|\vec{q}\right|^2 = \vec{q}^{\,2} = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^{\,2} + 2\left(\vec{a},\vec{b}\right) + \vec{b}^{\,2} = \left|\vec{a}\right|^2 + 2\left(\vec{a},\vec{b}\right) + \left|\vec{b}\right|^2 = 1 + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 1$.

Тогда $\text{пр}_{\vec{q}}\,\vec{p} = \dfrac{\left(\vec{p},\vec{q}\right)}{\left|\vec{q}\right|} = \dfrac{1}{2}$.

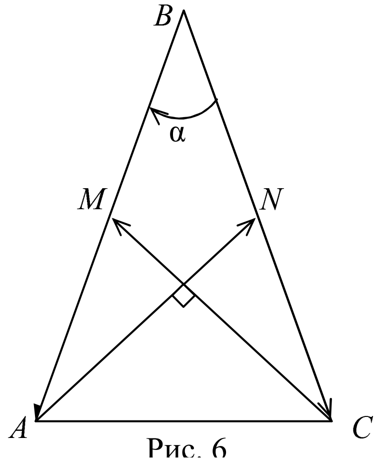


Рис. 6

Пример 10. Найти угол α при вершине равнобедренного треугольника, зная, что медианы, проведённые из вершин основания, взаимно перпендикулярны.

Решение. Так как ΔABC – равнобедренный, то $\left|\overrightarrow{BA}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$ (рис.6). Медианы перпендикулярны, следовательно, перпендикулярны и векторы $\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{AN}$, а значит $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AN} = 0$. Разложим векторы $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{CM}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}.$$

Используя свойства скалярного произведения, вычислим $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{CM}$:

$$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{CM} = \left(-\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right) = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} =$$

$$= \frac{5}{4}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} - \left|\overrightarrow{BA}\right|^2 = \frac{5}{4}\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\cos\alpha - \left|\overrightarrow{BA}\right|^2 = \frac{5}{4}\left|\overrightarrow{BA}\right|^2\cos\alpha - \left|\overrightarrow{BA}\right|^2 = 0.$$

Тогда $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \dfrac{\left|\overrightarrow{BA}\right|^2}{\frac{5}{4}\left|\overrightarrow{BA}\right|^2} = \dfrac{4}{5}$, $\quad \alpha = \arccos\dfrac{4}{5}$.

Пример 11. Найти параметр α так, чтобы угол между векторами $\vec{a} = \overrightarrow{e_1} + \alpha\overrightarrow{e_3}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$ был равен $\frac{\pi}{4}$, если вектор $\vec{e}_1$ перпендикулярен векторам $\vec{e}_2, \vec{e}_3$, $\left|\vec{e}_1\right| = 2$, $\left|\vec{e}_2\right| = 2$, $\left|\vec{e}_3\right| = 1$, а угол между векторами $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ равен $\frac{\pi}{3}$.

Решение. Для решения этой задачи воспользуемся формулой вычисления косинуса угла между векторами: $\cos\varphi = \dfrac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы в произвольном базисе. Вычислим скалярное произведение этих векторов. Воспользуемся свойствами скалярного произведения, позволяющими раскрывать скобки по правилу умножения многочлена на многочлен:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \left(\overrightarrow{e_1} + \alpha\overrightarrow{e_3}\right)\cdot\left(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}\right) = \left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_1}\right) + \alpha\left(\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_1}\right) + \left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right) + \alpha\left(\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_2}\right) = \overrightarrow{e_1}^{\,2} + \alpha\left|\overrightarrow{e_3}\right|\cdot\left|\overrightarrow{e_1}\right|\cdot\cos\left(\widehat{\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_1}}\right) +$$

$$+\alpha\left|\overrightarrow{e_3}\right|\cdot\left|\overrightarrow{e_2}\right|\cdot\cos\left(\widehat{\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_2}}\right) + \left|\overrightarrow{e_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{e_2}\right|\cdot\cos\left(\widehat{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}}\right) = 4 + 0 + \alpha\cdot 1\cdot 2\cdot\cos\frac{\pi}{3} + 0 = 4 + \alpha\cdot 1\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 4 + \alpha.$$

При вычислении данного скалярного произведения мы воспользовались равенством нулю скалярного произведения перпендикулярных векторов.

Чтобы вычислить $\left|\vec{a}\right|$, найдём прежде $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^{\,2}$. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля, т.е. $\vec{a}^{\,2}=\left|\vec{a}\right|^2$. Итак,

$$\left|\vec{a}\right|^2=\vec{a}^{\,2}=\left(\overrightarrow{e_1}+\alpha\overrightarrow{e_3}\right)^2=\overrightarrow{e_1}^2+2\alpha\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_3}+\overrightarrow{e_3}^2=2^2+2\alpha\left|\overrightarrow{e_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{e_3}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{e_1}\wedge\overrightarrow{e_3}\right)+1^2\cdot\alpha^2=4+\alpha^2,$$

отсюда $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{4+\alpha^2}$. Аналогично, $\left|\vec{b}\right|^2=\vec{b}^{\,2}=\left(\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}\right)^2=4+2\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_2}^{\,2}=4+4=8$.

Отсюда $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{8}$. Тогда $\cos\varphi=\dfrac{4+\alpha}{\sqrt{4+\alpha^2}\cdot\sqrt{8}}$; учитывая, что $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$, $\cos\varphi=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, получим $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{4+\alpha}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{4+\alpha^2}}$, т.е. $2\sqrt{4+\alpha^2}=4+\alpha$.

Возведя в квадрат обе части равенства, получим $4\left(4+\alpha^2\right)=16+8\alpha+\alpha^2$.

Отсюда $3\alpha^2-8\alpha=0$, или $\alpha(3\alpha-8)=0$, а это возможно лишь, если $\alpha=0$ или $\alpha=\dfrac{8}{3}$.

Итак, $\alpha=0$ или $\alpha=\dfrac{8}{3}$.

Пример 12. К одной и той же точке приложены две силы $\vec{P}$ и $\vec{Q}$, действующие под углом 120°, причём $\left|\vec{P}\right|=7$ и $\left|\vec{Q}\right|=4$. Найти величину равнодействующей силы $\vec{R}$.

Решение. Равнодействующая $\vec{R}$ сил $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ равна: $\vec{R}=\vec{P}+\vec{Q}$. Тогда

$$\left|\vec{R}\right|=\left|\vec{P}+\vec{Q}\right|=\sqrt{\left(\vec{P}+\vec{Q}\right)^2}=\sqrt{\vec{P}^{\,2}+2\vec{P}\cdot\vec{Q}+\vec{Q}^{\,2}}=\sqrt{\left|\vec{P}\right|^2+2\left|\vec{P}\right|\cdot\left|\vec{Q}\right|\cdot\cos120^\circ+\left|\vec{Q}\right|^2}=$$

$$=\sqrt{49+2\cdot7\cdot4\cdot(-0,5)+16}=\sqrt{49-28+16}=\sqrt{37}.$$

1.3. Векторное произведение

Вспомним понятие правой (левой) тройки векторов и ответим на вопрос: является ли изображённая на рис.7 тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ правой?

Ответ – нет. Так как поворот вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ с конца вектора $\vec{c}$ на угол φ (наименьший угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$) происходит по часовой стрелке, то тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – левая.

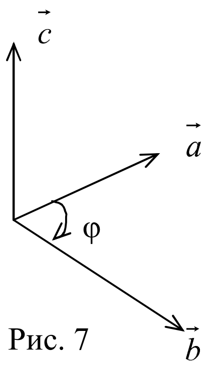


Рис. 7

Пример 1. Вычислить $\vec{j}\times\vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{i}$, $\vec{i}\times\vec{i}$.

Решение. 1) Покажем, что $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$. Сонаправленные векторы равны, если равны их длины. Вектор $\vec{j}\times\vec{k}$ сонаправлен вектору $\vec{i}$, так как $\vec{j}\perp\vec{i}$, $\vec{k}\perp\vec{i}$ и поворот вектора $\vec{j}$ к вектору $\vec{k}$ с конца вектора $\vec{i}$ происходит против часовой стрелки (рис.8). Вычислим длину вектора $\vec{j}\times\vec{k}$: $\left|\vec{j}\times\vec{k}\right|=\left|\vec{j}\right|\cdot\left|\vec{k}\right|\cdot\sin\dfrac{\pi}{2}=1\cdot1\cdot1=1$. $\left|\vec{i}\right|=1$. Итак, вектор $\vec{j}\times\vec{k}$

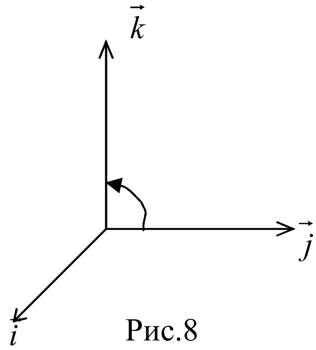


Рис.8

сонаправлен вектору $\vec{i}$ и имеет равную с ним длину, т.е. $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$.

2). Покажем, что $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$.

Аналогично пункту 1) $\left|-\vec{k}\right|=1$ и $\left|\vec{j}\times\vec{i}\right|=\left|\vec{j}\right|\cdot\left|\vec{i}\right|\cdot\sin\frac{\pi}{2}=1$; $\vec{j}\times\vec{i}$ и $\vec{k}$ противоположно направлены (поворот от вектора $\vec{j}$ к вектору $\vec{i}$ с конца вектора $\vec{k}$ происходит по часовой стрелке, (рис. 9), следовательно, правую тройку образуют векторы $\vec{j}$, $\vec{i}$, $-\vec{k}$).

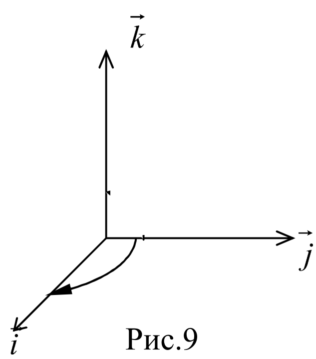


Рис.9

3). Произведение $\vec{i}\times\vec{i}=0$, так как длина вектора равна нулю. Действительно, $\left|\,\vec{i}\times\vec{i}\,\right|=\left|\,\vec{i}\,\right|^2\cdot\sin 0^\circ=1\cdot 0=0$.

Пример 2. Вычислить $\left(5\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

Решение. Вычислим $\left(5\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$, используя свойства векторного произведения: $\left(5\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=5\vec{a}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{a}+5\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{b}$. Вспомним, что $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ и $\vec{a}\times\vec{a}=0$. Получим $\left(5\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+5\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=6\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$.

Пример 3. Вычислить длину $\left(5\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$, если известно, что $\left|\vec{a}\right|=4$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{3}$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60°.

Решение. Используя ответ задачи 2, имеем $\left(5\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=6\vec{a}\times\vec{b}$. Тогда

$$\left|\left(5\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right|=\left|6\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right|=6\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=6\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=6\cdot 4\cdot\sqrt{3}\cdot\sin 60^\circ=24\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=36.$$

Пример 4. Вычислить $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, если $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+6\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{j}-3\vec{k}$.

Решение. По формуле вычисления векторного произведения векторов $\vec{a}=\{a_1;a_2;a_3\}$ и $\vec{b}=\{b_1;b_2;b_3\}$ в ортонормированном базисе:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 6\\ 0 & 1 & -3\end{vmatrix}=-3\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}.$$ Тогда $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{9+36+4}=7$.

Пример 5. Вычислить площадь параллелограмма и площадь треугольника, построенных на векторах $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}-3\vec{n}$, если $\left|\vec{m}\right|=6$, $\left|\vec{n}\right|=3$, $\left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right)=\frac{\pi}{6}$.

Решение. Искомая площадь параллелограмма равна $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$. Вычислим

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\vec{m}+2\vec{n}\right)\times\left(\vec{m}-3\vec{n}\right)=\vec{m}\times\vec{m}-3\vec{m}\times\vec{n}+2\vec{n}\times\vec{m}-6\vec{n}\times\vec{n}=3\vec{n}\times\vec{m}+2\vec{n}\times\vec{m}=5\vec{n}\times\vec{m}.$$

При вычислении использованы свойства векторного произведения: правило раскрытия скобок, $\vec{a}\times\vec{a}=0$, $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$, $\lambda\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\lambda\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$.

Площадь параллелограмма

$$S_{\text{пар}}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|5\vec{n}\times\vec{m}\right|=5\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{m}\right|\cdot\sin\left(\vec{n}\wedge\vec{m}\right)=5\cdot 3\cdot 6\cdot\sin\frac{\pi}{6}=5\cdot 3\cdot 6\cdot\frac{1}{2}=45.$$

Площадь треугольника S_Δ , построенного на тех же векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, равна $\frac{1}{2}S_{\text{пар}}$, т.е. $S_\Delta = \frac{45}{2} = 22{,}5$.

Пример 6. Найти расстояние от точки *A(0;4;-4)* до прямой (l), проходящей через точку *B(3;4;2)* параллельно вектору $\vec{c} = \{2;1;2\}$.

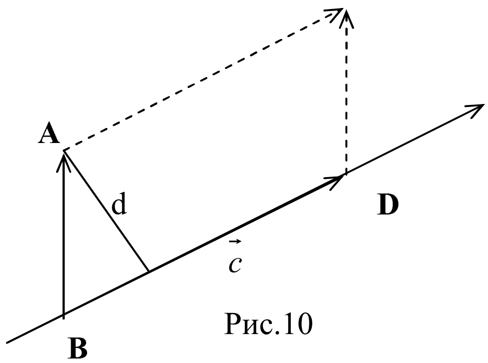


Рис.10

Решение. Поместим вектор $\vec{c}$ на прямую (l), проходящую через точку *B* параллельно вектору $\vec{c}$, как на рис.10: $\overrightarrow{BD} = \vec{c}$. Рассмотрим параллелограмм, построенный на векторах $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BD} = \vec{c}$. Расстояние d от точки *A* до прямой (l) есть длина высоты параллелограмма, опущенной из точки *A* на сторону *BD*. Площадь параллелограмма $S_{пар}$ равна $\left|\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BA}\right|$. Найдём координаты вектора $\overrightarrow{BA} = \{-3;0;-6\}$, вектор $\overrightarrow{BD} = \vec{c} = \{2;1;2\}$. Тогда

$$\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}, \quad \left|\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{6^2 + 6^2 + 3^2} = 3\sqrt{4+4+1} = 9.$$

Итак, $S_{пар} = 9$. Из геометрии известно, что $S_{пар} = \left|\overrightarrow{BD}\right| \cdot d$. Вычислим $\left|\overrightarrow{BD}\right| = \left|\vec{c}\right| = \sqrt{4+4+1} = 3$. Получим $3d = 9$ => $d = 3$ (расстояние от точки *A* до прямой (l)).

Пример 7. Найти вектор $\vec{m}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a} = \{3;4;2\}$, $\vec{b} = \{0;2;1\}$, а скалярное произведение $\vec{m} \cdot \vec{c} = 12$, где $\vec{c} = -2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$.

Решение. По условию задачи $\vec{m} \perp \vec{a}$, $\vec{m} \perp \vec{b}$, следовательно, вектор $\vec{m}$ параллелен вектору $\vec{a} \times \vec{b}$, который по определению векторного произведения, перпендикулярен перемножаемым векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда $\vec{m} = \lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$.

Найдём вектор $\vec{a} \times \vec{b}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{j} + 6\vec{k}, \quad \vec{a} \times \vec{b} = \{\,0;-3;\,6\}.$$

Координаты вектора $\vec{m}$: $\vec{m} = \lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \{0;-3\lambda;6\lambda\}$. Кроме того, по условию задачи $\vec{m} \cdot \vec{c} = 12$. По формуле вычисления скалярного произведения векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе, получим

$$\vec{m} \cdot \vec{c} = 0 \cdot (-2) + (-3\lambda)(-3) + 6\lambda(-1) = 9\lambda - 6\lambda = 3\lambda;\ 3\lambda = 12;\ \lambda = 4.$$

Окончательно имеем вектор $\vec{m} = \{0;-12;24\}$.

Пример 8. Сила $\vec{F} = \{2;2;9\}$ приложена к точке $A(4;\,2;-3)$. Определить момент этой силы относительно точки $B(3;\,2;-1)$.

Решение. Известно, что момент $\vec{m}_B\left(\vec{F}\right)$ силы $\vec{F}$, приложенной к точке *A*, относительно точки *B*, равен $\overrightarrow{BA} \times \vec{F}$. Найдём координаты вектора $\overrightarrow{BA} = \{1;0;-2\}$.

Тогда $\vec{m}_B\left(\vec{F}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -2\\ 2 & 2 & 9\end{vmatrix}=4\vec{i}-13\vec{j}+2\vec{k}$.

Пример 9. Точка $A(-1;2;-3)$ вращается относительно $(0;0;0)$ с постоянной угловой скоростью $\vec{w}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$. Найти координаты вектора линейной скорости точки A.

Решение. Известно, что $\vec{V}_A=\vec{w}\times\vec{r}_A$, где $\vec{r}_A$ – радиус-вектор точки A, $\vec{V}_A$ – линейная скорость точки A.

Следовательно, $\vec{r}_A=\{-1;2;-3\}$ и $\vec{V}_A=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & -3\end{vmatrix}=-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

Пример 10. Пусть $\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=5$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\dfrac{\pi}{6}$. Выразить через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ единичный вектор $\vec{e}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и образующий с ними правую тройку $\vec{a},\vec{b},\vec{e}$.

Решение. Так как вектор $\vec{e}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то он коллинеарен векторному произведению этих векторов: $\vec{e}\perp\vec{a}$ и $\vec{e}\perp\vec{b}$ => $\vec{e}\parallel\vec{a}\times\vec{b}$, т.е. $\vec{e}=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$. По условию задачи $\left|\vec{e}\right|=1$. Вычислим

$$\left|\vec{e}\right|=|\lambda|\cdot\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=|\lambda|\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=|\lambda|\cdot 2\cdot 5\cdot\sin\frac{\pi}{6}=|\lambda|\cdot 2\cdot 5\cdot\frac{1}{2}=5|\lambda|.$$

Итак, $1=5|\lambda|$, $|\lambda|=\dfrac{1}{5}$. Тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{e}$ – правая, т.е. $\vec{e}\uparrow\uparrow\vec{a}\times\vec{b}$, следовательно, $\lambda=\dfrac{1}{5}$ и $\vec{e}=\dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{5}$.

Пример 11. Вычислить величину момента силы $\vec{F}=2\vec{a}-\vec{b}$, приложенной к точке A, относительно точки N, если $\overrightarrow{NA}=\vec{a}+\vec{b}$, где $\left|\vec{a}\right|=6$, $\left|\vec{b}\right|=3$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\dfrac{\pi}{6}$.

Решение. Как известно, момент $\vec{M}_0\left(\vec{F}\right)$ силы $\vec{F}$, приложенной к точке А, относительно точки N равен $\vec{M}_0=\overrightarrow{NA}\times\vec{F}$ (рис.11).

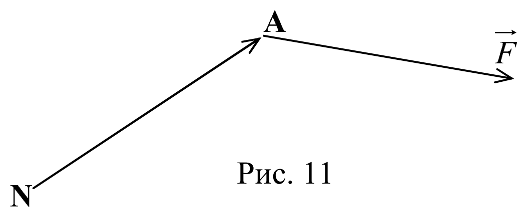


Рис. 11

Величина момента $\vec{M}_0$ есть $\left|\vec{M}_0\right|$, тогда

$$\left|\vec{M}_0\right|=\left|\overrightarrow{NA}\times\vec{F}\right|=\left|\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)\right|.$$

Вычислим $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$, используя свойства векторного произведения:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)=2\vec{a}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{b}+2\vec{b}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{b}=-\vec{a}\times\vec{b}-2\vec{a}\times\vec{b}=-3\vec{a}\times\vec{b},\text{ т.к. }\vec{a}\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{b}=0.$$

Тогда $\left|\vec{M}_0\right|=\left|-3\vec{a}\times\vec{b}\right|=3\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=3\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=3\cdot 6\cdot 3\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}=9\cdot 6\cdot\dfrac{1}{2}=27$.

Итак, $\left|\vec{M}_0\left(\vec{F}\right)\right|=27$.

Пример 12. Прямая l проходит через точку *A(2;-1;0)* параллельно вектору $\vec{m} = \{-1;2;2\}$. Прямая q проходит через точку *B(2;3;2)* параллельно тому же вектору. Найти расстояние между прямыми l и q.

Решение. Поскольку обе прямые параллельны одному и тому же вектору, то прямые параллельны. Итак, задача состоит в определении кратчайшего расстояния между параллельными прямыми. Один из способов решения этой задачи состоит в вычислении длины высоты параллелограмма, две параллельные стороны которого, например, AD и BC лежат на данных прямых l и q (рис.12). Определим координаты вектора $\overrightarrow{AB} = \{0;4;2\}$ (из координат конца вычтем координаты начала вектора). Известно, что $\overrightarrow{AD} = \vec{m} = \{-1;2;2\}$. Вычислим

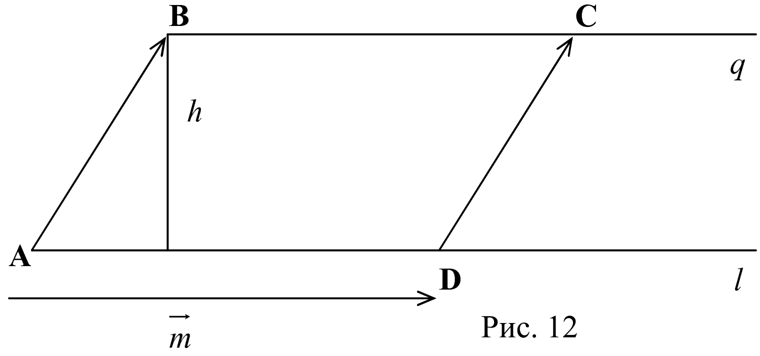


Рис. 12

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Следовательно, $S_{\text{пар}} = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{16+4+16} = 6$.

С другой стороны $S_{\text{пар}} = h \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right|$. Так как $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\vec{m}\right| = \sqrt{1+4+4} = 3$, то $h = \dfrac{S_{\text{пар}}}{\left|\overrightarrow{AD}\right|} = \dfrac{6}{3} = 2$.

Итак, расстояние между прямыми l и q равно 2.

Пример 13. Найти вектор $\vec{a}$, перпендикулярный векторам $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{j} + \vec{k}$, если проекция вектора $\vec{a}$ на ось l, составляющую равные острые углы с осями координат, равна $2\sqrt{3}$.

Решение. В результате векторного умножения вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$ получается вектор, перпендикулярный векторам-сомножителям, следовательно $\vec{a} \parallel \vec{b} \times \vec{c}$ и координаты искомого вектора $\vec{a}$ пропорциональны координатам векторного произведения $\vec{b} \times \vec{c}$.

Итак, $\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{a} = \{\lambda; -\lambda; 2\lambda\}$.

По условию ось l составляет равные углы с осями координат: $\alpha = \beta = \gamma$.

Тогда $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$ и равенство $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ даст $3\cos^2\alpha = 1$.

Отсюда, $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{3}$, $\cos\alpha = \mp\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, но поскольку по условию углы *α, β, γ* – острые, то $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Проекция на ось l совпадает с проекцией на единичный вектор $\vec{l}_0$ оси l; $\vec{l}_0 = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$. Тогда

$\text{пр}_{\vec{l}_0}\vec{a} = \left(\vec{a}, \vec{l}_0\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\lambda - \lambda + 2\lambda) = \frac{2\lambda}{\sqrt{3}}$. По условию задачи $\frac{2\lambda}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$. Следовательно, λ=3 и искомый вектор имеет координаты $\vec{a} = \{3;-3;6\}$.

1.4. Смешанное произведение

Пример 1. Вычислить $\left(\vec{j}, \vec{i}, \vec{k}\right)$.

Решение. По определению смешанного произведения

$$\left(\vec{j}, \vec{i}, \vec{k}\right) = \left(\vec{j} \times \vec{i}\right) \cdot \vec{k} = -\vec{k} \cdot \vec{k} = -\left|\vec{k}\right|^2 = -1.$$

Пример 2. Вычислить смешанное произведение $\left(\vec{i}, \vec{j}, 5\vec{i} - 3\vec{j}\right)$.

Решение. Смешанные произведения, содержащие два равных вектора, равны нулю. Поэтому

$$\left(\vec{i}, \vec{j}, 5\vec{i} - 3\vec{j}\right) = \left(\vec{i}, \vec{j}, 5\vec{i}\right) + \left(\vec{i}, \vec{j}, -3\vec{j}\right) = 5\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{i}\right) - 3\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{j}\right) = 0.$$

Ответ задачи можно получить, используя условия компланарности векторов. Действительно, векторы $\vec{i}, \vec{j}, 5\vec{i} - 3\vec{j}$ компланарны, т.к. вектор $5\vec{i} - 3\vec{j}$ есть линейная комбинация базисных векторов $\vec{i}, \vec{j}$ плоскости. Известно, что, если три вектора компланарны, то их смешанное произведение равно нулю, т.е.

$$\left(\vec{i}, \vec{j}, 5\,\vec{i} - 3\vec{j}\right) = 0.$$

Пример 3. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}, \vec{b}$; векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют левую тройку. Зная, что $\left|\vec{a}\right| = 6$, $\left|\vec{b}\right| = 3$, $\left|\vec{c}\right| = 3$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\frac{\pi}{6}$, вычислить смешанное произведение $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$.

Решение. Так как векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ некомпланарны и образуют левую тройку, то смешанное произведение $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = -V$, где V – объём параллелепипеда, построенного на этих векторах. Из геометрии известно, что $V = S_{осн} \cdot H$, где $S_{осн}$ — площадь основания параллелепипеда, H – его высота; $S_{осн} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ (см. применение векторного произведения); $H = \left|\vec{c}\right|$, т.к. $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$. Тогда

$$V = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \cdot \left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \cdot \left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\frac{\pi}{6} \cdot \left|\vec{c}\right| = 6 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = 27,$$

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = -27.$$

Пример 4. Вычислить смешанные произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и $\vec{b}\vec{a}\vec{c}$, если известны координаты векторов-сомножителей в ортонормированном базисе:

$$\vec{a} = \{0; 1; 2\},\ \vec{b} = \{1; 1; -1\},\ \vec{c} = \{1; 2; -2\}.$$

Решение. Используем формулу для вычисления смешанного произведения в ортонормированном базисе:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-1\,(-2+1)+2\,(2-1)=1+2=3\,;$$

По свойствам смешанного произведения $\vec{b}\vec{a}\vec{c}=-\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, откуда $\vec{b}\vec{a}\vec{c}=-3$.

Пример 5. Компланарны ли векторы $\vec{a}=\{1;0;1\}$, $\vec{b}=\{-1;-1;0\}$, $\vec{c}=\{2;3;-1\}$?

Решение. Известно, что если смешанное произведение трёх векторов равно нулю, то векторы компланарны. Вычислим смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=1+\left(-3+2\right)=1-1=0\,;$$

Т.к. $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0$, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны.

Пример 6. Лежат ли четыре точки *A(1;0;1), B(1;0;0), C(2;1;0), D(0;2;1)* в одной плоскости?

Решение. Если точки *A, B, C, D* лежат в одной плоскости, то в этой плоскости лежат и векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

Найдём координаты векторов $\overrightarrow{AB}=\{0;0;-1\}$, $\overrightarrow{AC}=\{1;1;-1\}$, $\overrightarrow{AD}=\{-1;2;0\}$, вычислим смешанное произведение этих векторов:

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-1\left(2+1\right)=-3\neq 0\,;$$

следовательно, векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ не компланарны, т.е. не лежат в одной плоскости, а значит и точки *A, B, C, D* не лежат в одной плоскости.

Пример 7. Вычислить объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=\{\,0;-1;-1\}$, $\vec{b}=\{\,1;\,1;-1\}$, $\vec{c}=\{-1;\,0;\,1\}$.

Решение. Известно, что $V_{\text{пар}}=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$.

Вычислим $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=\left(1-1\right)-1\left(0+1\right)=-1$.

Следовательно, $V_{\text{пар}}=1$.

Пример 8. Даны вершины треугольной пирамиды: *A(2;3;1), B(4;1;-2), C(6;3;7), D(-5;-4;8).* Найти объём пирамиды и длину высоты пирамиды, опущенной из вершины *D*.

Решение. Известно, что $V_{\text{пир}}=\dfrac{1}{6}V_{\text{пар}}=\dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|$. Найдём координаты векторов: $\overrightarrow{AB}=\{2;-2;-3\}$, $\overrightarrow{AC}=\{4;0;6\}$, $\overrightarrow{AD}=\{-7;-7;7\}$. Вычислим смешанное произведение этих векторов

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix}=2\cdot 42+2\cdot\left(28+42\right)-3\cdot\left(-28\right)=308\,.$$

Тогда $V_{\text{пир}} = \frac{308}{6} = \frac{154}{3}$. Высота пирамиды H совпадает с высотой параллелепипеда, построенного на тех же векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

Поэтому $H = \frac{V_{\text{пар}}}{S_{\text{осн}}} = \frac{\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}$.

Найдём векторное произведение $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k}.$$

Тогда $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{12^2 + 24^2 + 8^2} = 4\sqrt{9+36+4} = 4\sqrt{49} = 4 \cdot 7 = 28$ и

$$H = \frac{\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|} = \frac{308}{28} = 11.$$

Пример 9. Вычислить проекцию вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$, где $\vec{a} = \{1;1;-2\}$, $\vec{b} = \{1;-1;1\}$, $\vec{c} = \{1;2;-2\}$.

Решение. По формуле $\text{пр}_{\vec{c}}\,\vec{d} = \frac{\vec{d} \cdot \vec{c}}{\left|\vec{c}\right|}$ найдём $\text{пр}_{\vec{c}}\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \frac{\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}}{\left|\vec{c}\right|} = \frac{\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)}{\left|\vec{c}\right|}$, где $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ – смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 1 - 4 - 2 - 2 + 2 = -3; \quad \left|\vec{c}\right| = \sqrt{1+4+4} = 3 \;\Rightarrow\; \text{пр}_{\vec{c}}\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \frac{-3}{3} = -1.$$

Пример 10. Заданы векторы $\vec{p} = \{3;-2;1\}$, $\vec{q} = \{-1;1;-2\}$, $\vec{r} = \{2;1;-3\}$, $\vec{c} = \{11;-6;5\}$ своими координатами в некотором ортонормированном базисе трёхмерного пространства R^3. Показать, что векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ составляют базис R^3 и найти координаты вектора $\vec{c}$ в этом базисе.

Решение. По определению базиса пространства R^3 векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ должны быть некомпланарны, т.е. их смешанное произведение отлично от нуля.

$$\vec{p}\,\vec{q}\,\vec{r} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 14 - 3 = 8 \neq 0.$$

Итак, $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ образуют базис R^3. Запишем разложение вектора $\vec{c}$ по базису $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$: $\vec{c} = \alpha_1\vec{p} + \alpha_2\vec{q} + \alpha_3\vec{r}$.

Скаляры α_1, α_2, α_3 и есть искомые координаты. Так как равные векторы в одном базисе имеют равные координаты, то для отыскания α_1, α_2, α_3 получим систему:

$$\begin{cases} 11 = 3\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3, \\ -6 = -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \\ 5 = \alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3. \end{cases}$$

Найдём решение системы по формулам Крамера.

$$\Delta=\begin{vmatrix}3&-1&2\\-2&1&1\\1&-2&-3\end{vmatrix}=8;\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}11&-1&2\\-6&1&1\\5&-2&-3\end{vmatrix}=16;\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}3&11&2\\-2&-6&1\\1&5&-3\end{vmatrix}=-24;\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}3&-1&11\\-2&1&-6\\1&-2&5\end{vmatrix}=8;$$

$$\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{16}{8};\quad \frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-24}{8};\quad \alpha_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{8}{8}=1.\ \text{Итак, } \vec{c}=2\vec{p}-3\vec{q}+\vec{r}.$$

Пример 11. Даны векторы $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=\{-2;2;1\}$. Найти проекцию вектора $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ на ось, образующую с осью абсцисс угол $\frac{\pi}{3}$, с осью ординат угол $\frac{\pi}{4}$, с осью аппликат угол, больший $\frac{\pi}{2}$.

Решение. Единичный вектор $\vec{e}$, направленный по заданной оси, имеет координатами направляющие косинусы углов $\alpha=\frac{\pi}{3}$ (с осью абсцисс), $\beta=\frac{\pi}{4}$ (с осью ординат), γ (с осью аппликат).

Известно, что $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. Тогда $\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\gamma=1$; $\cos^2\gamma=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$, $\cos\gamma=\pm\frac{1}{2}$. Так как $\gamma>\frac{\pi}{2}$, то $\cos\gamma=-\frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\vec{e}=\left\{\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{1}{2}\right\}.$$

Для вычисления проекции вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ воспользуемся формулой

$$\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}.$$

Отметим, что проекция на ось совпадает с проекцией на единичный вектор этой оси. В нашей задаче:

$$\text{пр}_{\vec{e}}\,\vec{c}=\frac{\vec{c}\cdot\vec{e}}{\left|\vec{e}\right|}=\frac{\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{e}}{1}=\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{e},$$

где $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{e}$ — смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{e}$. Вычислим $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{e}$ по формуле вычисления смешанного произведения векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{e}=\begin{vmatrix}1&-1&3\\-2&2&1\\1/2&\sqrt{2}/2&-1/2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&-1&3\\-2&2&1\\1&\sqrt{2}&-1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left(-2-\sqrt{2}+2-1-6\sqrt{2}-6\right)=-\frac{7+7\sqrt{2}}{2}.$$

Получим $\text{пр}_{\vec{e}}\,\vec{c}=\frac{-7\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}$.

2. Аналитическая геометрия

Основные понятия и утверждения аналитической геометрии направлены на построение числовых аналогов геометрических объектов и изучение этих аналогов средствами алгебры. Для этого вводиться понятие уравнения линии или поверхности. *Уравнением линии (поверхности)* называют уравнение, которому удовлетворяют координаты всех точек линии (поверхности) и только они.

2.1. Плоскость

Плоскость в прямоугольной декартовой системе координат *Oxyz* может быть задана уравнением одного из следующих видов:

1) $Ax + By + Cz + D = 0$ — ***общее уравнение*** *плоскости*;

2) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ — ***уравнение плоскости, проходящей через точку*** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ***перпендикулярно вектору*** $\vec{N} = (A, B, C)$;

3) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ — ***уравнение плоскости в отрезках***;

Угол φ ***между плоскостями*** $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ с нормальными векторами $\vec{N}_1, \vec{N}_2$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right|}.$$

Условие параллельности ***плоскостей:*** $\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$**, или** $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ **.**

Условие перпендикулярности *плоскостей*

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0 \text{ , или } A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 .$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *до плоскости* $Ax + By + Cz + D = 0$

$$d = \frac{\left| Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} .$$

Пример 1. Получить уравнение плоскости, проходящей через точки

$$M_1(x_1, y_1, z_1),\ M_2(x_2, y_2, z_2),\ M_3(x_3, y_3, z_3) .$$

Решение. Точка $M(x, y, z)$ принадлежит плоскости тогда и только тогда, когда векторы

$$\overrightarrow{M_1M} = \left(x - x_1, y - y_1, z - z_1\right), \overrightarrow{M_1M_2} = \left(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\right), \overrightarrow{M_1M_3} = \left(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\right)$$

компланарны (рис.13). Условие компланарности этих векторов $\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$, или в координатной форме

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 .$$

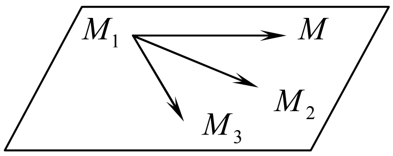


Рис.13

Это и есть искомое уравнение.

Замечание. Полученное уравнение однозначно определяет плоскость при условии, что точки M_1, M_2, M_3 не лежат на одной прямой, то есть $\overrightarrow{M_1M_2} \nparallel \overrightarrow{M_1M_3}$

Пример2. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(2;3;-1)$ параллельно плоскости $5x-3y+2z-10=0$.

Решение. Нормальный вектор искомой плоскости совпадает с нормальным вектором $\vec{N}=(5;-3;2)$ данной плоскости. Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной данному вектору $\vec{N}$:

$5(x-2)-3(y-3)+2(z+1)=0$, или $5x-3y+2z+1=0$.

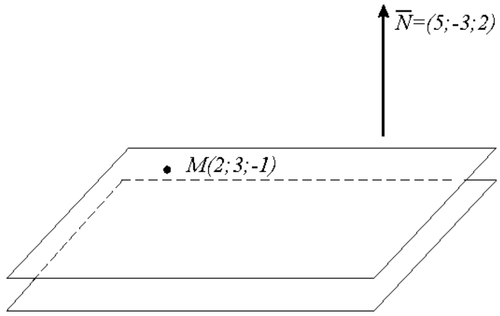


Рис.14

Пример 3. Из точки $P(2;3;5)$ на координатные оси опущены перпендикуляры. Составить уравнение плоскости, проходящей через их основания.

Решение. Основания перпендикуляров, опущенных на координатные оси, – точки $P_1(2;0;0)$, $P_2(0;3;0)$, $P_3(0;0;5)$. Используем уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z-0 \\ 0-2 & 3-0 & 0-0 \\ 0-2 & 0-0 & 5-0 \end{vmatrix}=0, \text{ или } 15x+10y+6z-30=0.$$

Замечание. Можно также воспользоваться уравнением плоскости в отрезках: $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=1$, или $15x+10y+6z-30=0$.

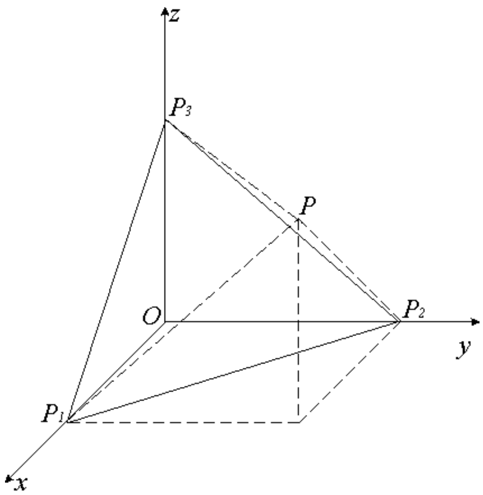


Рис.15

Пример 4. Исследовать взаимное расположение плоскостей:
1) $-x+2y-z+1=0$ и $y+3z-1=0$; 2) $2x-y-z+1=0$ и $-4x+2y+2z-2=0$.

Решение. 1). Нормальные векторы плоскостей $\overline{N_1}=(-1;2;-1)$ и $\overline{N_2}=(0;1;3)$ неколлинеарны, следовательно, плоскости пересекаются (рис.16). Дополнительно определим угол φ между плоскостями:

$$\cos\varphi=\frac{-1\cdot 0+2\cdot 1+(-1)\cdot 3}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2+3^2}}=\frac{-1}{2\sqrt{15}}, \quad \varphi=\arccos\frac{-1}{2\sqrt{15}}\approx 97^0.$$

2). Нормальные векторы плоскостей $\overline{N_1}=(2;-1;-1)$ и $\overline{N_2}=(-4;2;2)$ коллинеарны,

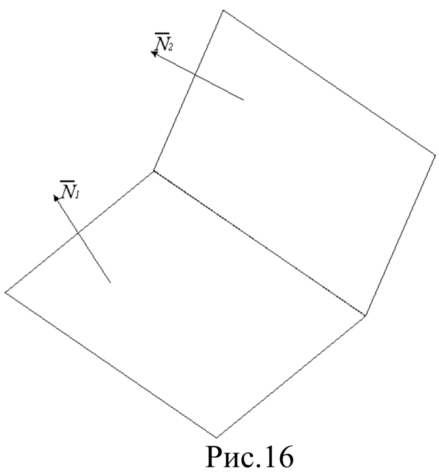


Рис.16

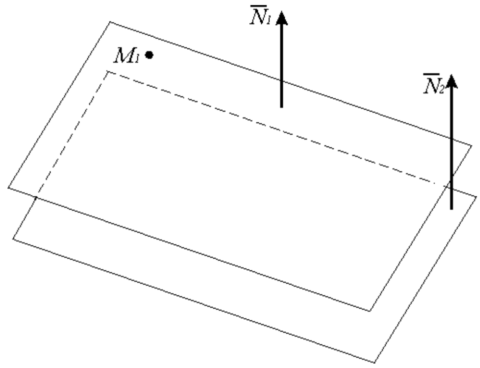


Рис.17

так как $\frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}=\frac{-1}{2}$, следовательно, плоскости параллельны (рис.17). Дополнительно определим расстояние между плоскостями. Оно равно расстоянию от произвольной точки M_1 первой плоскости до второй плоскости. Для отыскания точки M_1 положим $x_1=0,\ z_1=0$ и подставим в уравнение первой плоскости: $2\cdot 0-y_1-0+1=0$, откуда $y_1=1$, $M_1(0;1;0)$. Расстояние от M_1 до второй плоскости:

$$d=\frac{|-4\cdot 0+2\cdot 1+2\cdot 0-2|}{\sqrt{(-4)^2+2^2+2^2}}=0\,.$$

Таким образом, плоскости совпадают.

Замечание. То, что уравнения $2x-y-z+1=0$ и $-4x+2y+2z-2=0$ задают одну плоскость, определяется пропорциональностью их коэффициентов: $\frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}=\frac{-1}{2}=\frac{1}{-2}$.

Примеры для самостоятельного решения

1. Получить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$ параллельно вектору $\vec{a}=(p,q,r)$.

Ответ: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ p & q & r \end{vmatrix}=0\,.$

2. Получить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$ параллельно векторам $\vec{a_1}=(p_1,q_1,r_1)$ и $\vec{a_2}=(p_2,q_2,r_2)$.

Ответ: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}=0\,.$

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(0;1;1)$ и $B(2;0;1)$ перпендикулярно плоскости $2x-y+z+1=0$.

Ответ: $x+2y-2=0$.

4. Из точки $A(2;1;-3)$ на координатные плоскости опущены перпендикуляры. Составить уравнение плоскости, проходящей через их основания.

Ответ: $-3x-6y+2z+12=0$.

5. Исследовать взаимное расположение плоскостей:

а) $2x-y+z-1=0$ и $-4x+2y-2z-1=0$; б) $x-y+1=0$ и $y-z+1=0$.

Ответ: а)параллельны, $d=\frac{3}{2\sqrt{6}}$; б)пересекаются, $\varphi=120^0$.

6. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;7;-5)$ и отсекающей на осях координат равные положительные отрезки.

Ответ: $x+y+z-3=0$.

2.2. Прямая в пространстве

Прямая в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ может быть задана уравнением одного из следующих видов:

1). Общие уравнения

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Прямая задана как линия пересечения двух плоскостей, где коэффициенты A_1, B_1, C_1 не пропорциональны A_2, B_2, C_2 .

2). Параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 + pt, \\ y = y_0 + qt, \\ z = z_0 + rt, \end{cases}$$

где $M_0 = (x_0; y_0; z_0)$ - заданная точка прямой, $\vec{l} = (p; q; r)$ - направляющий вектор прямой.

3). ***Канонические уравнения*** прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно вектору $\vec{l} = (p; q; r)$.

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}.$$

4). ***Уравнение прямой****, проходящей* ***через две заданные точки*** $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Угол φ между прямыми с направляющими векторами $\vec{l_1} = (p_1, q_1, r_1)$ и $\vec{l_2} = (p_2, q_2, r_2)$:

$$\cos\varphi = \cos\left(\widehat{\vec{l_1}, \vec{l_2}}\right) = \frac{\vec{l_1} \cdot \vec{l_2}}{\left|\vec{l_1}\right| \cdot \left|\vec{l_2}\right|}.$$

Условие параллельности прямых*:*

$$\vec{l_1} \parallel \vec{l_2}, \text{ или } \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Условие перпендикулярности прямых:

$$\vec{l_1} \perp \vec{l_2}, \text{ или } \vec{l_1} \cdot \vec{l_2} = p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2 = 0.$$

Расстояние от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ***до прямой*** $\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}$:

$$d = \frac{\left| \left[\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{l} \right] \right|}{\left| \vec{l} \right|}.$$

Пример 1. Привести уравнения прямой к каноническому виду:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$$

Решение.

1 способ. Нормальные векторы плоскостей $2x - y + 3z - 1 = 0$ и $5x + 4y - z - 7 = 0$ $\overrightarrow{N_1} = (2;-1;3)$ и $\overrightarrow{N_2} = (5;4;-1)$ соответственно. Эти векторы перпендикулярны направляющему вектору $\vec{l}$ прямой. Поэтому

$$\vec{l} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -11\vec{i} + 17\vec{j} + 13\vec{k}.$$

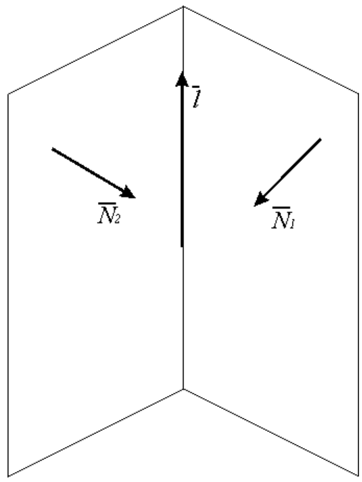


Рис.18

В качестве точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, через которую проходит искомая прямая, можно взять, например, точку её пересечения с координатной плоскостью *Oxy*:

$$z_0 = 0, \quad \begin{cases} 2x_0 - y_0 - 1 = 0, \\ 5x_0 + 4y_0 - 7 = 0, \end{cases}$$

откуда $x_0 = 11/13,\ y_0 = 9/13,\ M_0(11/13, 9/13, 0)$.

Зная точку M_0 и направляющий вектор $\vec{l}$, запишем канонические уравнения прямой

$$\frac{x - 11/13}{-11} = \frac{y - 9/13}{17} = \frac{z - 0}{13}.$$

2 способ. Исключив из системы уравнений сначала *y*, потом *x*, получим систему

$$\begin{cases} 13x + 11z - 11 = 0, \\ -13y + 17z + 9 = 0. \end{cases}$$

Разрешим каждое уравнение относительно *z*:

$$z = \frac{13(x - 11/13)}{-11} = \frac{13(y - 9/13)}{17}, \text{ или } \frac{x - 11/13}{-11} = \frac{y - 9/13}{17} = \frac{z}{13}.$$

Пример 2. Определить, при каком условии прямые

$$\frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{q_1} = \frac{z - z_1}{r_1} \quad \text{и} \quad \frac{x - x_2}{p_2} = \frac{y - y_2}{q_2} = \frac{z - z_2}{r_2}$$

компланарны, т.е. лежат в одной плоскости.

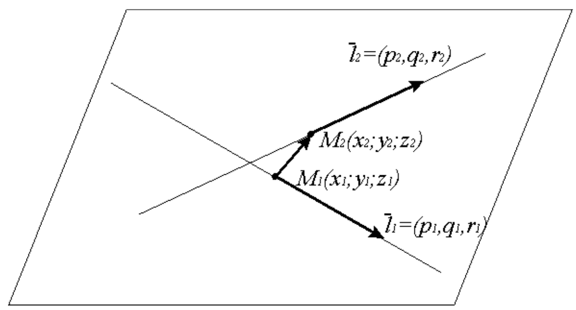


Рис. 19

Решение. Данные прямые находятся в одной плоскости только при условии, что векторы $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\vec{l_1} = (p_1; q_1; r_1)$ и $\vec{l_2} = (p_2; q_2; r_2)$ компланарны, т.е. смешанное произведение этих векторов равно нулю:

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{l_1}, \vec{l_2}\right) = 0, \text{ или } \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 3. В уравнениях прямой $\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{a}$ определить параметр a так, чтобы эта прямая пересекалась с прямой $\frac{x+1}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z}{1}$, и найти точку их пересечения.

Решение. Направляющие векторы прямых $\vec{l_1}=(2,-3,\ a)$ и $\vec{l_2}=(3,2,1)$ не являются коллинеарными, так как $\frac{2}{3}\neq-\frac{3}{2}$. Следовательно, эти прямые не будут параллельными при любом значении a.

Запишем условие компланарности прямых (см. пример 2):

$$\begin{vmatrix} -1-0 & -5-0 & 0-0 \\ 2 & -3 & a \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0, \text{ откуда } a=1.$$

Координаты точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ пересечения прямых есть решение системы, составленной из уравнений этих прямых:

$$\begin{cases} \frac{x_0}{2}=\frac{y_0}{-3}=\frac{z_0}{1}, \\ \frac{x_0+1}{3}=\frac{y_0+5}{2}=\frac{z_0}{1}, \end{cases}$$

Из первого равенства выразим $x_0=2z_0$, $y_0=-3z_0$ и подставим во второе, в результате получим $x_0=2,\ y_0=-3,\ z_0=1$, или $M_0(2,-3,1)$.

Пример 4. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $A(3;2;4)$ и пересекающей ось Oy под прямым углом.

Решение. Искомая прямая перпендикулярна оси Oy и пересекает её, следовательно, проходит через точку $B(0;2;0)$ (рис.20). Составим уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

$$\frac{x-3}{0-3}=\frac{y-2}{2-2}=\frac{z-4}{0-4}, \text{ или } \frac{x-3}{-3}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-4}{-4}.$$

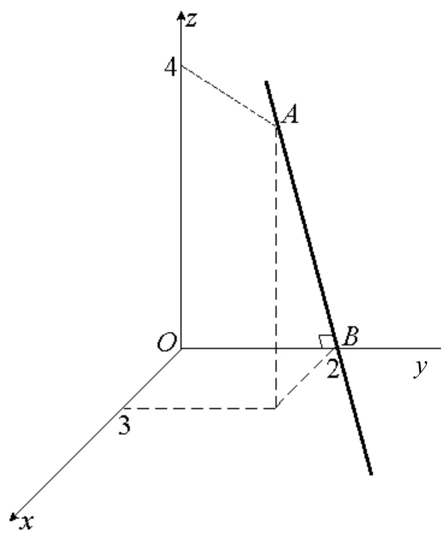


Рис.20

Пример 5. Выяснить взаимное расположение прямых

$$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+2}{-1} \text{ и } \frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}.$$

Вычислить угол φ между ними.

Решение. Проверим условие компланарности, т.е. лежат ли прямые в одной плоскости (см. пример 2):

$$\begin{vmatrix} -1-0 & -1-1 & 2-(-2) \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=12\neq 0.$$

Прямые не лежат в одной плоскости, то есть скрещиваются.

Найдем угол φ между прямыми:

$$\cos\varphi=\frac{2\cdot1+0\cdot2-1\cdot(-1)}{\sqrt{(-2)^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{30}}, \quad \text{откуда } \varphi=\arccos\frac{3}{\sqrt{30}}\approx 57^0.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;1;1)$ и перпендикулярной векторам $\overrightarrow{N_1}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ и $\overrightarrow{N_2}=3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$.

Ответ: $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-7}$.

2. Вычислить углы, образованные с осями координат прямой $\begin{cases} x-2y-5=0, \\ x-3z+8=0. \end{cases}$

Ответ: $\cos\alpha=\dfrac{6}{7};\cos\beta=\dfrac{3}{7};\cos\gamma=\dfrac{2}{7}.$

3. Найти уравнения прямой, проходящей через точку $A(1;-2;3)$ и образующей с осями Ox и Oy углы 45^0 и 60^0 соответственно.

Ответ: $\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{\pm 1}$.

4. Даны три последовательные вершины параллелограмма $ABCD$: $A(3;0;-1)$, $B(1;2;-4)$ и $C(0;7;-2)$. Найти уравнения сторон AD и CD.

Ответ: $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+1}{2}$; $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-7}{-2}=\dfrac{z+2}{3}$.

5. Вычислить расстояние между параллельными прямыми $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ и $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$.

Ответ: $\dfrac{5\sqrt{30}}{6}$.

6. Найти угол φ между прямыми $\begin{cases} 4x-y-z+12=0, \\ y-z-2=0. \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x-2y+16=0, \\ 3x-z=0. \end{cases}$

Ответ: $\cos\varphi=\dfrac{20}{21}$.

2.3. Прямая и плоскость

Угол между прямой $\dfrac{x-x_0}{p}=\dfrac{y-y_0}{q}=\dfrac{z-z_0}{r}$ с направляющим вектором $\vec{l}=(p,q,r)$ ***и плоскостью*** $Ax+By+Cz+D=0$ с нормальным вектором $\vec{N}=(A,B,C)$:

$$\sin\varphi=\frac{\left|\vec{N}\cdot\vec{l}\right|}{\left|\vec{N}\right|\cdot\left|\vec{l}\right|}=\frac{|Ap+Bq+Cr|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{p^2+q^2+r^2}}\ .$$

Условие параллельности прямой и плоскости

$$\vec{N}\perp\vec{l}\text{, или } Ap+Bq+Cr=0\,.$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости

$$\vec{N}\,\|\,\vec{l}\text{, или } \frac{A}{p}=\frac{B}{q}=\frac{C}{r}$$

Пример 1. При каких значениях α и β прямая $\dfrac{x-1}{\alpha}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-3}{-2}$ перпендикулярна к плоскости $3x+2y-\beta z+2=0$?

Решение. Прямая перпендикулярна к плоскости, если ее направляющий вектор $\vec{l}$ коллинеарен нормальному вектору плоскости $\vec{N}$ (рис.21): $\vec{l} \parallel \vec{N}$, или в координатах

$$\frac{\alpha}{3} = \frac{4}{2} = \frac{-2}{-\beta}, \text{ откуда } \alpha = 6,\ \beta = 1.$$

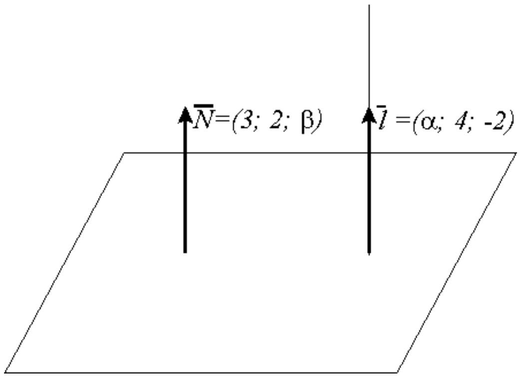


Рис.21

Пример 2. Найти точку B, симметричную точке $A(1;1;1)$ относительно плоскости $x + y - 2z - 6 = 0$.

Решение. Составим канонические уравнения прямой AB, проецирующей точку A на заданную плоскость (т.е прямой, проходящей через точку перпендикулярно плоскости). Эта прямая проходит через точку $A(1;1;1)$ параллельно вектору $\vec{N} = (1;1;-2)$, поэтому ее уравнение имеет вид:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}.$$

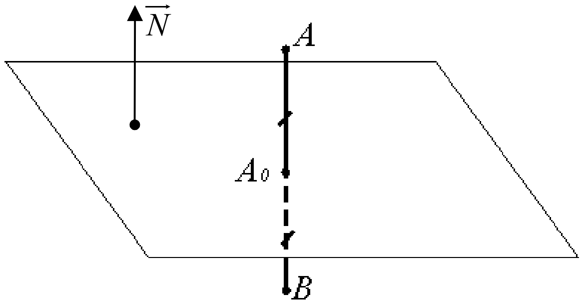


Рис. 22

Определим координаты точки A_0 пересечения прямой и плоскости (проекции точки A на заданную плоскость), решая совместно уравнения прямой и плоскости:

$$\begin{cases} \dfrac{x_0-1}{1} = \dfrac{y_0-1}{1} = \dfrac{z_0-1}{-2}, \\ x_0 + y_0 - 2z_0 - 6 = 0, \end{cases} \text{ откуда } A_0(2;2;-1).$$

A_0 — середина отрезка AB, следовательно, $x_0 = \dfrac{x_A + x_B}{2}, y_0 = \dfrac{y_A + y_B}{2}, z_0 = \dfrac{z_A + z_B}{2}$,

т.е. $2 = \dfrac{1+x_B}{2}, 2 = \dfrac{1+y_B}{2}, -1 = \dfrac{1+z_B}{2}$, откуда $B(3;3;-3)$.

Пример 3. Исследовать взаимное расположение прямой $\dfrac{x-x_0}{p} = \dfrac{y-y_0}{q} = \dfrac{z-z_0}{r}$ и плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Решение.

Случай 1. (Рис. 23) Прямая пересекает плоскость при условии, что вектор $\vec{l} = (p,q,r)$ не перпендикулярен вектору $\vec{N} = (A,B,C)$ или в координатной форме $Ap + Bq + Cr \neq 0$.

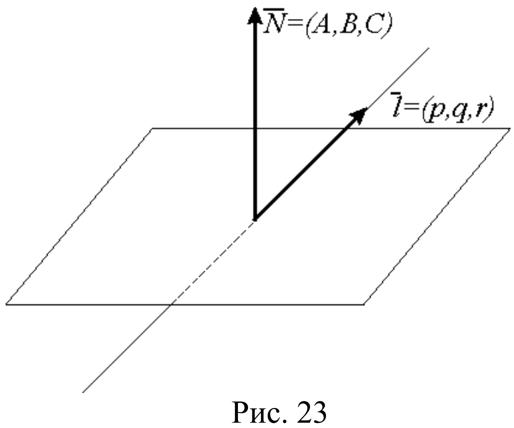


Рис. 23

Случай 2. Прямая и плоскость параллельны (рис. 24), если они не имеют общих точек, в том числе $M_0(x_0;y_0;z_0)$ не принадлежит плоскости, и $\vec{l} \perp \vec{N}$.

В координатной форме $\begin{cases} Ap+Bq+Cr=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0. \end{cases}$

Случай 3. Прямая лежит в плоскости (рис.25), если M_0 принадлежит этой плоскости и $\vec{l}\perp\vec{N}$. В координатной форме: $\begin{cases} Ap+Bq+Cr=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \end{cases}$

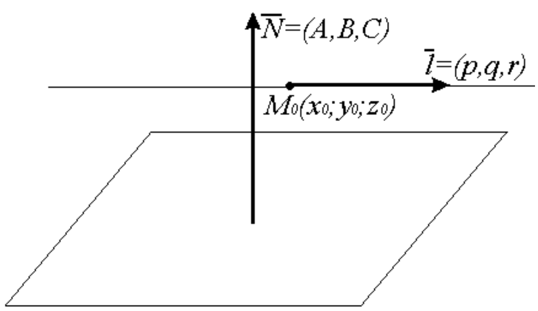


Рис. 24

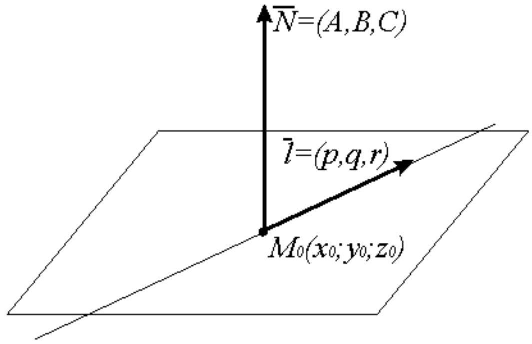


Рис. 25

Пример 4. Выяснить взаимное расположение прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3}$ и плоскости $x+y+2z-5=0$. Найти уравнение плоскости, проходящей через заданную прямую перпендикулярно заданной плоскости.

Решение. Прямая проходит через точку , её направляющий вектор $\vec{l}=(1;2;3)$. Нормальный вектор плоскости $\vec{N}=(1;1;2)$. Так как $\vec{l}\cdot\vec{N}=1\cdot1+2\cdot1+3\cdot2\neq 0$, следовательно, прямая пересекает плоскость.

Точка $M(x,y,z)$ принадлежит плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3}$ перпендикулярно плоскости $x+y+2z-5=0$, только при условии, что векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{N}$ и $\vec{l}$ компланарны:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-(-1) & z-0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0,$$

откуда уравнение искомой плоскости $x+y-z=0$.

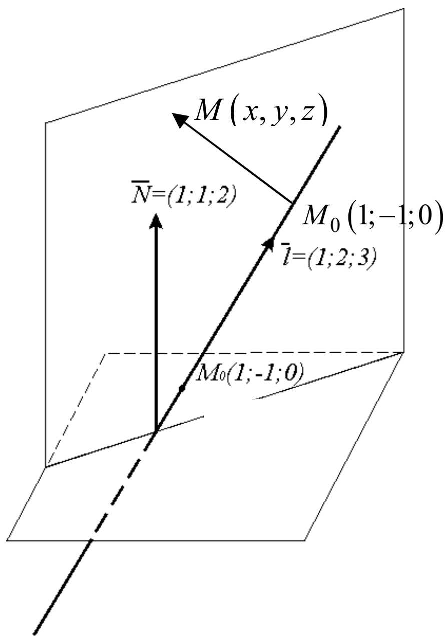


Рис. 26

Пример 5. Определить углы, которые образует прямая $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ 3x+3y-2z-2=0 \end{cases}$ с координатными плоскостями. Выяснить взаимное расположение этой прямой и координатных плоскостей.

Решение. Определим направляющий вектор прямой (см. 2.2, пример 1): $\vec{l}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 3 & 3 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}-\vec{j}$ (здесь $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$–нормальные векторы плоскостей $x+y-z-1=0$, $2x+3y-2z-2=0$).

Угол между прямой и плоскостью определяется углом между направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости. Пусть $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ – углы, которые образует данная прямая с плоскостями Oxy, Oxz, Oyz, тогда:

$$\sin\varphi_1=\frac{1\cdot 0+(-1)\cdot 0+0\cdot 1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}\cdot 1}=0,$$

$$\sin\varphi_2=\frac{1\cdot 0+(-1)\cdot 1+0\cdot 0}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}\cdot 1}=\frac{-\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin\varphi_3=\cos\left(\widehat{\vec{l},\vec{i}}\right)=\frac{1\cdot 1+(-1)\cdot 0+0\cdot 0}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}\cdot 1}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ откуда}$$

$$\varphi_1=0,\quad \varphi_2=\frac{\pi}{4},\quad \varphi_3=\frac{\pi}{4}.$$

Т.к. $\varphi_2\neq 0,\ \varphi_3\neq 0$, то прямая пересекает плоскости Oxz, Oyz. Т.к. $\varphi_1=0$, то прямая параллельна плоскости Oxy или лежит в этой плоскости.

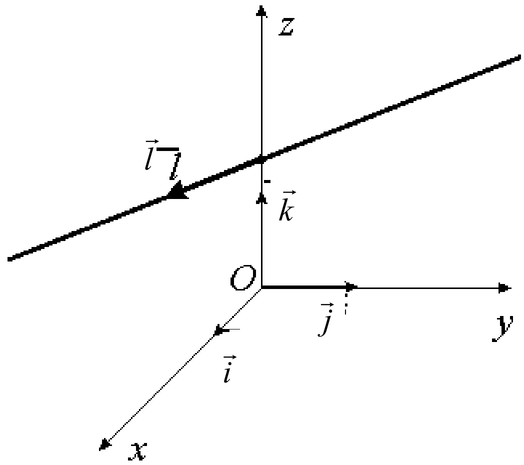


Рис. 27

Найдем координаты какой-либо точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ данной прямой, например, точки пересечения с плоскостью Oxz. Тогда $y_0=0$ и $\begin{cases}x_0-z_0=1,\\ 3x_0-2z_0=2,\end{cases}$ откуда $x_0=0, z_0=-1$. Т.к. $z_0\neq 0$, то $M_0\notin Oxy$, следовательно, прямая не лежит в плоскости Oxy, а только параллельна этой плоскости (рис.27).

Примеры для самостоятельного решения

1. Определить угол между прямой $\begin{cases}x+y+z-2=0,\\ 2x-y+z-2=0\end{cases}$ и плоскостью, проходящей через точки $A(2;3;-1)$, $B(1;1;0)$ и $C(0;-2;1)$. *Ответ:* $\arcsin\left(\frac{1}{2\sqrt{7}}\right)$.

2. Написать уравнения проекций прямой $\begin{cases}x+2y-3z+1=0,\\ x-y+z-2=0\end{cases}$ на координатные плоскости. *Ответ:* $\begin{cases}-4x+y+5=0,\\ z=0;\end{cases}$ $\begin{cases}3x-z-3=0,\\ y=0;\end{cases}$ $\begin{cases}-3y+4z-3=0,\\ x=0.\end{cases}$

3. Найти точку B, симметричную точке $A(1;1;1)$ относительно прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$. *Ответ:* $B\left(\frac{9}{7};-\frac{4}{7};-\frac{22}{7}\right)$.

4. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{3}$ параллельно прямой $\frac{x}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-3}$. *Ответ:* $x-y-z+4=0$.

5. Определить, при каком значении λ плоскость $5x-3y+\lambda z+1=0$ будет параллельна прямой $\begin{cases} x-4z-1=0, \\ y-3z+2=0. \end{cases}$ *Ответ:* $\lambda=-11$.

6. Определить, при каких значениях A и B плоскость $Ax+By+3z-5=0$ перпендикулярна прямой $\begin{cases} x=3+2t, \\ y=5-3t, \\ z=2-2t. \end{cases}$ *Ответ:* $A=-3, B=\frac{9}{2}$.

7. Выяснить расположение прямой $\begin{cases} 3x-2y+3z-6=0, \\ x-y+z-2=0 \end{cases}$ по отношению к координатным плоскостям. *Ответ:* пересекает Oxy, Oyz; принадлежит Oxz

2.4. Прямая на плоскости

Прямая на плоскости в декартовой прямоугольной системе координат Oxy может быть задана уравнением одного из следующих видов:

1) $Ax+By+C=0$ – ***общее уравнение прямой***;

2) $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ – ***уравнение*** *прямой*, проходящей ***через точку*** $M_0(x_0;y_0)$ ***перпендикулярно нормальному вектору*** $\vec{N}=(A;B)$;

3) $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}$ – ***каноническое уравнение*** *прямой*, где $M_0(x_0;y_0)$ – точка прямой, $\vec{l}=(p;q)$– направляющий вектор прямой;

4) $\begin{cases} x=x_0+pt, \\ y=y_0+qt, \end{cases}$ $t\in(-\infty;+\infty)$.– ***параметрические уравнения*** *прямой*;

5) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$– ***уравнение*** *прямой* ***в отрезках***;

6) $y=kx+b$– ***уравнение*** *прямой* ***с угловым коэффициентом*** $k=\mathrm{tg}\alpha$, где α – угол, который составляет прямая с положительным направлением оси Ox;

7) $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ – ***уравнение*** прямой, проходящей ***через две точки*** $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$;

8) $y-y_0=k(x-x_0)$ – ***уравнение*** *прямой* ***с угловым коэффициентом*** k, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$.

Угол φ ***между прямыми*** на плоскости

$$\cos\varphi = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{N_1},\overrightarrow{N_2}}\right) = \frac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{N_2}\right|}, \text{ или } \operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

где $\overrightarrow{N_1}$, $\overrightarrow{N_2}$ - нормальные векторы прямых, k_1, k_2 - угловые коэффициенты прямых.

Условие параллельности прямых

$$k_1 = k_2 \text{ , или } \overrightarrow{N_1} \parallel \overrightarrow{N_2} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} .$$

Условие перпендикулярности прямых

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \text{ , или } \overrightarrow{N_1}\overrightarrow{N_2} = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0 .$$

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ ***до прямой*** $Ax + By + C = 0$: $\quad d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Пример 1. Составить уравнение высоты треугольника ABC, проведенной из точки C, и определить её длину, если $A(0;1)$, $B(6;5)$, $C(12;-1)$.

Решение. Уравнение высоты CH треугольника ABC (рис.28) составим как уравнение прямой, проходящей через точку $C(12;-1)$ с нормальным вектором $\overrightarrow{AB} = (6-0;5-1) = (6;4)$: $\qquad 6(x-12) + 4(y+1) = 0$, или $3x + 2y - 34 = 0$.

Длину высоты CH находим как расстояние от точки C до прямой AB. Уравнение AB составим по точкам $A(0;1)$ и $B(6;5)$:

$$\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-1}{5-1}, \text{ или } 2x - 3y + 3 = 0 .$$

Тогда $|CH| = \dfrac{|2\cdot 12 - 3\cdot(-1) + 3|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \dfrac{30}{\sqrt{13}}$.

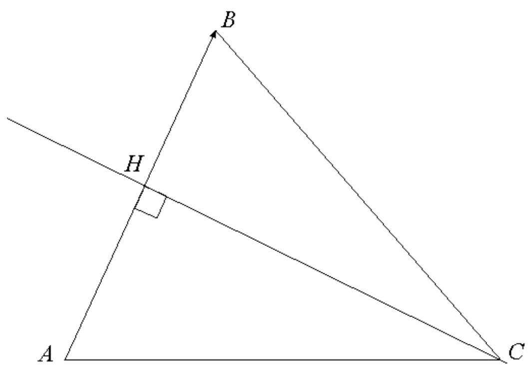


Рис. 28

Пример 2. Составить уравнения биссектрис углов между прямыми $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Решение. Биссектриса угла – множество точек, равноудалённых от его сторон, то есть в данном случае, от прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Точка $M(x;y)$ принадлежит биссектрисе тогда и только тогда, когда

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \text{ или}$$

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0 .$$

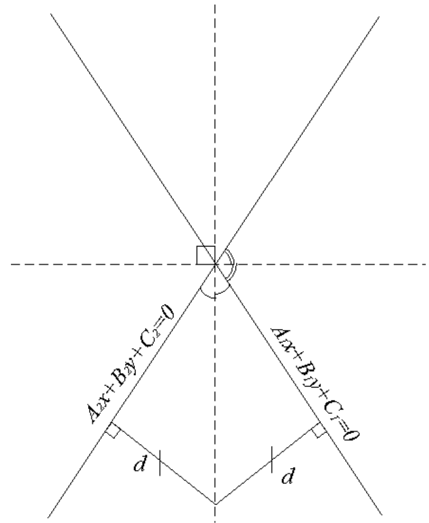


Рис.29

Это и есть уравнения обеих биссектрис.

Пример 3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(5;1)$ и образующей с прямой $2x+y-4=0$ угол $\frac{\pi}{4}$.

Решение. Угловой коэффициент данной прямой $2x+y-4=0$ равен –2. Тогда угловой коэффициент k искомой прямой должен удовлетворять условию

$$\left|\frac{k+2}{1-2k}\right| = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4},$$

откуда, учитывая равенство $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$, получаем

$$\left[\begin{array}{l} k=3, \\ k=-\frac{1}{3}. \end{array}\right.$$

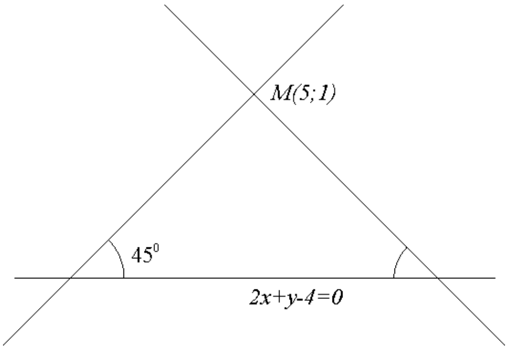


Рис. 30

Таким образом, условию задачи удовлетворяют две прямые.
Составим уравнения этих прямых по угловому коэффициенту и точке M:

$$\left[\begin{array}{l} y-1=3(x-5), \\ y-1=-\frac{1}{3}(x-5), \end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l} 3x-y-14=0, \\ x+3y-8=0. \end{array}\right.$$

Пример 4. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $P(2;4)$ на расстоянии 1 от точки $Q(0;3)$.

Решение. 1 способ. Пусть $Ax+By+C=0$ - общее уравнение искомой прямой. Координаты точки P удовлетворяют этому уравнению: $2A+4B+C=0$.
Расстояние от точки Q до прямой равно 1:

$$\frac{|0\cdot A+3\cdot B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=1, \text{ или } (3B+C)^2=A^2+B^2.$$

Решаем систему $\begin{cases} 2A+4B+C=0, \\ (3B+C)^2=A^2+B^2. \end{cases}$ Для этого из первого уравнения выразим $3B+C=-2A-B$ и подставим во второе. Возведем полученное уравнение в квадрат: $3A^2+4AB=0$ и, учитывая первое уравнение, получим

$$\left[\begin{array}{l} A=0, \quad C=-4B; \\ B=-\frac{3}{4}A, \quad C=A. \end{array}\right.$$

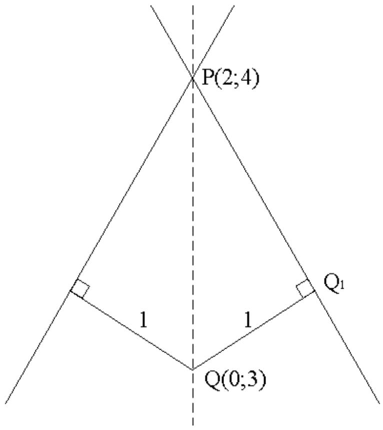


Рис. 31

Условию задачи удовлетворяют две прямые $\left[\begin{array}{l} By-4B=0, \\ Ax-\frac{3}{4}Ay+A=0, \end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l} y-4=0, \\ 4x-3y+4=0. \end{array}\right.$

2 способ. Рассмотрим прямоугольный треугольник PQQ_1, где Q_1 - проекция точки Q на искомую прямую.

$$|QQ_1|=1 \text{ по условию, } |PQ|=\sqrt{(0-2)^2+(3-4)^2}=\sqrt{5}.$$

$$|PQ_1| = \sqrt{|PQ|^2 - |QQ_1|^2} = 2, \quad \mathrm{tg}\left(\angle QPQ_1\right) = \frac{QQ_1}{PQ_1} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, задача сводится к тому, чтобы составить уравнение прямой, проходящей через точку $P(2;4)$ и образующей с прямой PQ угол $\mathrm{arctg}\frac{1}{2}$ (см. пример 3). Уравнение PQ (по 2 точкам): $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{1}$, или $y = \frac{x}{2} + 3$.

Угловой коэффициент искомой прямой удовлетворяет условию

$$\left|\frac{k - \frac{1}{2}}{1 + \frac{k}{2}}\right| = \frac{1}{2}, \text{ откуда } \left[\begin{array}{l} k = 0, \\ k = \frac{4}{3}. \end{array}\right.$$

Используя координаты точки P, записываем для каждого случая уравнение прямой с угловым коэффициентом $y = 4$; $y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$.

Пример 5. Известны уравнение стороны AB квадрата $ABCD$ $x + 3y - 3 = 0$ и точка пересечения диагоналей $O(-2;0)$. Написать уравнение остальных его сторон.

Решение. Диагонали AC и BD проходят через точку O и образуют со сторонами квадрата углы в 45°. Как в примере 3 определяем их уравнения: $y = x/2 + 1$ (AC) и $y = -2x - 4$ (BD).

Координаты вершин A и B определяем как точки пересечения диагоналей со стороной AB:

$$A: \begin{cases} x + 3y - 3 = 0 \ (AB), \\ y = \frac{x}{2} + 1 \ (AC); \end{cases} \quad B: \begin{cases} x + 3y - 3 = 0 \ (AB), \\ y = -2x - 4 \ (BD); \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A(0;1), \\ B(-3;2). \end{array}$$

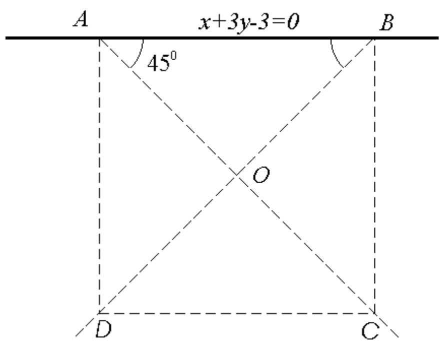


Рис. 32

Канонические уравнения прямых (AD) и (BC) составим по точке и направляющему вектору $\vec{N} = (1;3)$: $\frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{3} (AD)$, $\frac{x-(-3)}{1} = \frac{y-2}{3} (BC)$.

Точка O - середина отрезка AC, следовательно: $\begin{cases} x_0 = \frac{x_A + x_C}{2}, \\ y_0 = \frac{y_A + y_C}{2}, \end{cases}$ откуда $C(-4;-1)$.

Уравнение (DC) найдем по точке C и нормальному вектору $\vec{N} = (1;3)$:

$$1 \cdot (x + 4) + 3 \cdot (y + 1) = 0, \text{ или } x + 3y + 7 = 0.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Написать уравнения сторон треугольника ABC, если задана его вершина $A(1;3)$ и уравнения двух медиан $x - 2y + 1 = 0$ и $y - 1 = 0$. Составить уравнение высоты AH этого треугольника.

Ответ: стороны: $x + 2y - 7 = 0$, $x - 4y - 1 = 0$, $x - y + 2 = 0$; высота: $4x + y - 7 = 0$.

2. Дана точка $M(-1;2)$ и прямая L: $-2x + y - 1 = 0$. Вычислить расстояние от точки M до прямой L. Записать уравнение прямой, проходящей через точку M:

а) перпендикулярно L; б) параллельно L; в) под углом $\pi/4$ к L.

Ответ: $\frac{3}{\sqrt{5}}$. $à)\ \frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{1}$; $á)-2(x+1)+(y-2)=0$; $â)\ y=-3x-1,\ y=\frac{x}{3}+\frac{7}{3}$.

3. Даны две противоположные вершины квадрата $A(1;3)$ и $C(-1;1)$. Найти координаты двух других его вершин и написать уравнения сторон.

Ответ: $B(1;1), D(-1;3), x-1=0\ (AB), y-1=0\ (BC), x+1=0\ (CD), y-3=0\ (AD)$.

4. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $M(8;6)$ и отсекает от координатного угла треугольник площадью 12.

Ответ: $\frac{x}{4}+\frac{y}{-6}=1, \frac{x}{-8}+\frac{y}{3}=1$.

5. Составить уравнения сторон треугольника, если известны координаты их середин $A_1(-1;-1)$, $B_1(1;9)$ и $C_1(9;1)$.

Ответ: $x-5y+44=0\ (AC)$; $x+y-2=0\ (BC)$; $5x-y-44=0\ (AB)$.

6. Определить расстояние от точки $A(2;-1)$ до прямой, отсекающей на осях координат отрезки $a=8, b=6$. *Ответ:* 4,4.

2.5. Кривые второго порядка

Окружность (рис.33) – множество всех точек плоскости, равноудалённых от данной точки (центра). Уравнение окружности с центром $O_1(x_0;y_0)$ радиуса R:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

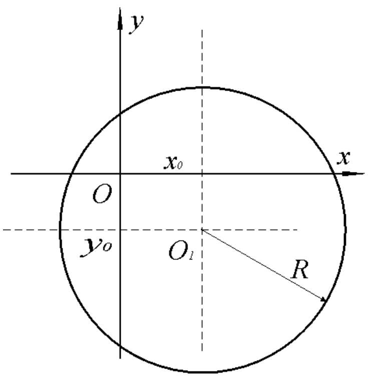


Рис.33

Эллипс (рис.34)– множество всех точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная (обозначаемая $2a$), большая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

$F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$- фокусы, a и b – большая и малая *полуоси* эллипса, $2a>2c$, $b^2=a^2-c^2$.

Уравнение эллипса с центром, смещенным в точку $O_1(x_0;y_0)$, и осями, параллельными осям координат:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

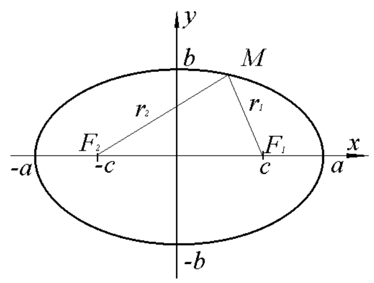


Рис. 34

Гипербола (рис.35) – множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний которых до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная (обозначаемая $2a$), меньшая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение гиперболы:

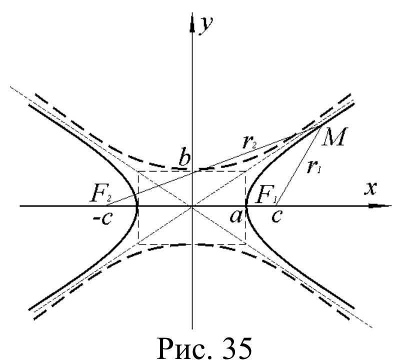


Рис. 35

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

a,b – полуоси гиперболы, $2a<2c,\quad b^2=c^2-a^2$

$F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$ – фокусы, $y=\pm\frac{b}{a}x$ – асимптоты.

Сопряженные гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{и} \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \quad .$$

(основная линия на рисунке) *(пунктир на рисунке)*

Уравнение гиперболы с центром, смещенным в точку $O_1(x_0;y_0)$ параллельно осям координат

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

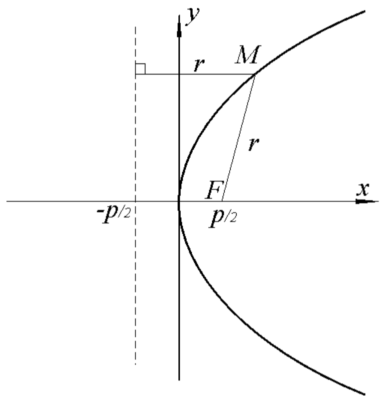


Рис. 36

Парабола (рис.36) – множество всех точек плоскости, равноудалённых от данной точки (фокуса) и данной прямой (директрисы).

Каноническое уравнение параболы

$$y^2=2px,$$

ось симметрии совпадает с осью Ox, $x=-\frac{p}{2}$ – директриса, $F\left(\frac{p}{2};0\right)$- фокус.

Уравнение $x^2=2py$ задает параболу, ось симметрии которой совпадает с осью Oy, директриса $y=-\frac{p}{2}$, фокус $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$

Уравнение параболы с вершиной, смещенной в точку $O_1(x_0;y_0)$, и осью симметрии, параллельной оси Ox: $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$.

Пример 1. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(5;0)$ и $B(1;4)$, если её центр лежит на прямой $x+y-3=0$.

Решение. Уравнение окружности со смещенным центром содержит три параметра x_0,y_0,R. Для их определения составим систему из трёх уравнений.

$$\begin{cases} x_0+y_0-3=0, & \text{(центр окружности – на прямой } x+y-3=0\text{)},\\ (5-x_0)^2+(0-y_0)^2=R^2, & \text{(точка } A \text{ - на окружности)},\\ (1-x_0)^2+(4-y_0)^2=R^2. & \text{(точка } B \text{ - на окружности)}. \end{cases}$$

Результат решения системы: $x_0=2, y_0=1, R=\sqrt{10}$.

Таким образом, уравнение имеет вид: $(x-2)^2+(y-1)^2=10$.

Пример 2. Составить уравнение касательной к окружности $(x-3)^2+(y+2)^2=25$, проведенной в точке $A(0;2)$.

Решение. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через заданную точку с заданным нормальным вектором. Касательная, проходящая через точку $A(0;2)$, имеет нормальный вектор

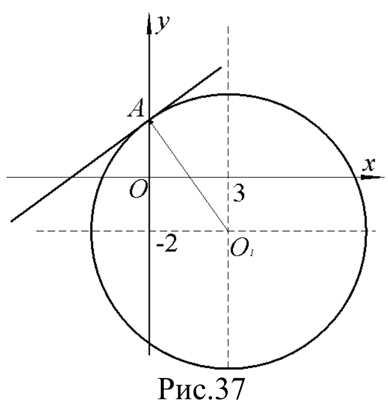


Рис.37

$\overrightarrow{N_1} = \overrightarrow{O_1 A} = (0-3; 2-(-2)) = (-3; 4)$. Таким образом, уравнение касательной $-3(x-0)+4(y-2)=0$, или $-3x+4y-8=0$.

Пример 3. Найти длину перпендикуляра, восстановленного из фокуса эллипса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ к большой оси до пересечения с эллипсом.

Решение. Фокусы эллипса $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$. Уравнение перпендикуляра: $x=\sqrt{5}$.

Координаты точек A и B пересечения эллипса и перпендикуляра к большой оси удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} x=\sqrt{5}, \\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1, \end{cases}$$

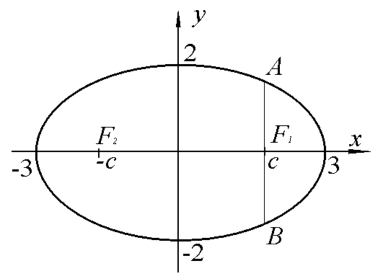


Рис. 38

откуда $A\left(\sqrt{5};\frac{4}{3}\right)$, $B\left(\sqrt{5};-\frac{4}{3}\right)$ и $|AB|=\frac{4}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{3}$.

Пример 4. Составить уравнение множества точек, расстояние которых от точки $A(0;1)$ в два раза меньше расстояния до прямой $y-4=0$.

Решение. Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка (рис.39). Расстояние от M до прямой $y-4=0$: $d_1=|y-4|$.

Расстояние от точки M до точки A:

$$d_2=\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}.$$

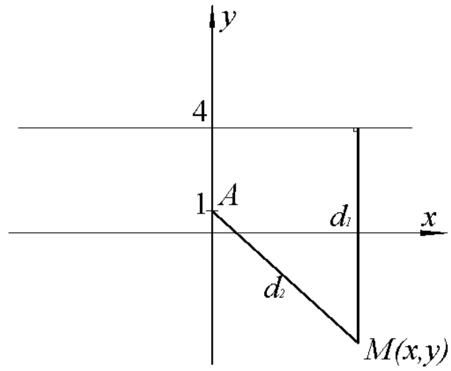


Рис. 39

По условию точка $M(x;y)$ принадлежит указанному в условии множеству тогда и только тогда, когда

$$d_1=2d_2,$$

откуда $|y-4|=2\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}$, или $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$.

Таким образом, искомое множество точек – эллипс с центром в начале координат, оси которого совпадают с осями координат (рис.40). Полуоси $a=\sqrt{3}$, $b=2$.

Пример 5. Асимптоты гиперболы имеют уравнения $y=\pm x$. Составить уравнение гиперболы, если она проходит через точку $M(\sqrt{3};\sqrt{2})$.

Решение. Из уравнения асимптот получаем, что центр гиперболы находится в начале координат и $\frac{b}{a}=1$, или $a=b$.

Тогда каноническое уравнение гиперболы принимает вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1.$$

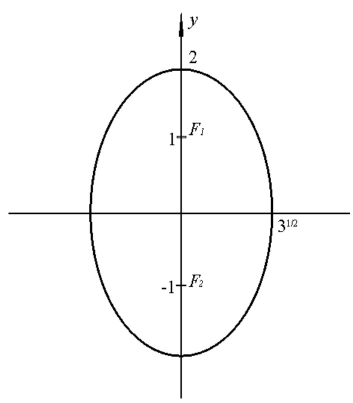


Рис. 40

Точка $M(\sqrt{3};\sqrt{2})$ принадлежит гиперболе, следовательно:

$$\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{a^2}-\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{a^2}=1, \quad a^2=1.$$

Таким образом, искомое уравнение гиперболы $x^2-y^2=1$.

Пример 6. Найти уравнение множества точек, равноотстоящих от окружности $x^2+4x+y^2=0$ и от точки $A(2;0)$.

Решение. Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка, причем $x\geq 0$, иначе расстояние от точки M до окружности меньше расстояния от нее до точки A.

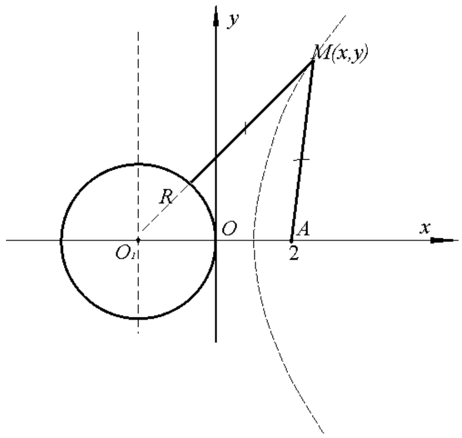


Рис. 41

Расстояние от точки $M(x;y)$ до точки $A(2;0)$:

$$|MA|=\sqrt{(x-2)^2+y^2}\ .$$

Расстояние от точки M до окружности: $d=MO_1-R$, где $O_1(x_0;y_0)$ — центр, R — радиус окружности.

Преобразуем уравнение окружности к виду $(x+2)^2+y^2=4$, откуда $x_0=-2$, $y_0=0$, $R=2$.

Расстояние от точки $M(x;y)$ до точки $O_1(-2;0)$

$$MO_1=\sqrt{(x+2)^2+y^2}\ .$$

Точка M принадлежит указанному множеству только при выполнении равенства:

$$MA=d\text{, или } \sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{(x+2)^2+y^2}-2\text{, откуда получаем } \begin{cases} x^2-\dfrac{y^2}{3}=1, \\ x\geq 0. \end{cases}$$

Получили правую ветвь гиперболы.

Пример 7. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Ox и отсекающей от прямой $y=x$ отрезок $4\sqrt{2}$.

Решение. Вершина параболы – точка $O(0;0)$, Ox – ось симметрии, следовательно, уравнение параболы имеет вид $y^2=2px$.

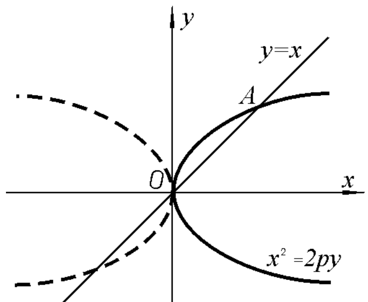


Рис.42

Система $\begin{cases} y=x, \\ y^2=2px \end{cases}$ определяет координаты точек пересечения прямой и параболы: $O(0;0)$ и $A(2p;2p)$.

Тогда $OA=\sqrt{4p^2+4p^2}=2|p|\sqrt{2}$.

По условию $OA=4\sqrt{2}$, поэтому $|p|=2$.

Условию задачи удовлетворяют параболы $y^2=4x$ и $y^2=-4x$.

Пример 8. Установить тип линии, заданной уравнением, и построить линию:

1) $x=-\sqrt{4-y^2}$; 2) $y=\sqrt{12-4x^2+8x}$; 3) $x=1-\sqrt{y-2}$; 4) $y=\sqrt{4x^2-4}$.

Решение.

1). Преобразуем уравнение:

$$x=-\sqrt{4-y^2}\iff\begin{cases}x^2=4-y^2\\ x\le 0\end{cases}\iff\begin{cases}x^2+y^2=4\\ x\le 0.\end{cases}.$$

Получили левую полуокружность с центром $O(0;0)$ и радиусом $R=2$ (рис.43).

2). $y=\sqrt{12-4x^2+8x}\iff\begin{cases}y^2=12-4x^2+8x\\ y\ge 0\end{cases}\iff\begin{cases}y^2+4x^2-8x=12\\ y\ge 0.\end{cases}$

Выделим полный квадрат относительно x: $\begin{cases}y^2+4(x-1)^2=16,\\ y\ge 0.\end{cases}$

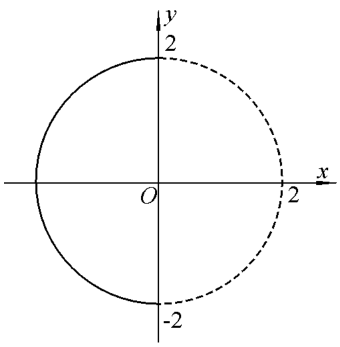


Рис. 43

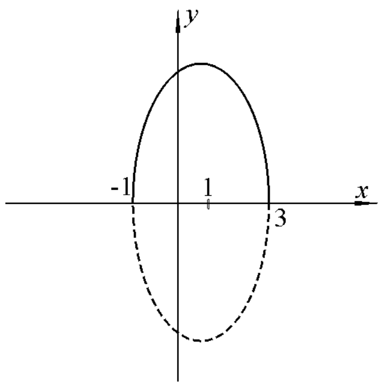


Рис. 44

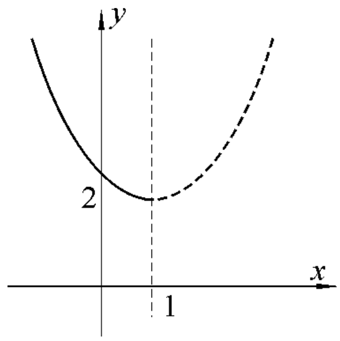


Рис. 45

Разделим уравнение на 16: $\begin{cases}\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{(x-1)^2}{4}=1,\\ y\ge 0.\end{cases}$

Получили верхнюю половину эллипса с центром $(1;0)$ и полуосями $a=2,\ b=4$ (рис.44).

3). $x=1-\sqrt{y-2}\iff x-1=-\sqrt{y-2}\iff\begin{cases}(x-1)^2=y-2\\ x-1\le 0\end{cases}\iff\begin{cases}y-2=(x-1)^2,\\ x\le 1.\end{cases}$

Эти соотношения определяют левую ветвь параболы с вершиной $(1;2)$ и осью симметрии, параллельной оси ординат (рис.45).

4) $y=\sqrt{4x^2-4}\Leftrightarrow y=\sqrt{4x^2-4}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=4x^2-4\\ y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}4x^2-y^2=4\\ y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-\dfrac{y^2}{4}=1,\\ y\ge 0.\end{cases}$$

Эти соотношения определяют верхнюю половину гиперболы с центром $(0;0)$ и полуосями $a=1, b=2$ (рис. 46).

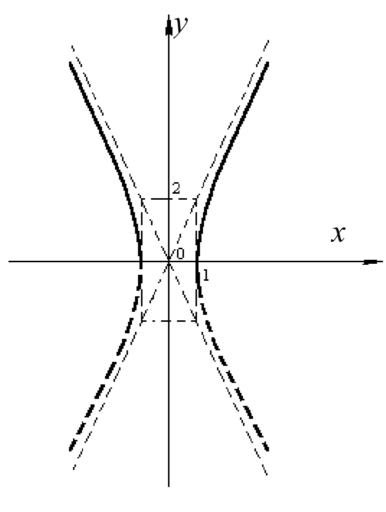


Рис. 46

Примеры для самостоятельного решения

1. Составить уравнение окружности, описанной около треугольника, стороны которого заданы

уравнениями $9x-2y-41=0$, $7x+4y+7=0$, $x-3y+1=0$.

Указание. Определить координаты вершин треугольника и подставить их в уравнение окружности. *Ответ:* $(x-3{,}1)^2+(y+2{,}3)^2=22{,}1$.

2. Составить уравнение общей хорды окружностей $x^2+y^2=16$ и $(x-5)^2+y^2=9$.

Ответ: $x=3{,}2$.

3. Определить координаты центров и радиусы окружностей:

1) $x^2+y^2-8x+4y=0$; 2) $x^2-5x+y^2-3y-\frac{1}{2}=0$; 3) $x^2+y^2-4x+14y+54=0$.

Указание. Выделить полные квадраты по переменным x и y.

Ответ: 1) $(4;-2)$, $R=\sqrt{20}$; 2) $\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$, $R=3$;

3) $R^2=-1$ – уравнение не имеет смысла (мнимая окружность).

4. Составить уравнение эллипса с фокусами $F_1(0;0)$ и $F_2(1;1)$ и длиной большой полуоси $a=1$. *Ответ*: $3x^2+3y^2-2xy-2x-2y-1=0$.

Указание. Воспользоваться определением эллипса.

5. Найти центр и полуоси эллипса, заданного уравнением:

1) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$; 2) $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$;

Ответ: 1) $(3;-1)$, $a=3$, $b=\sqrt{5}$; 2) $(-1;2)$, $a=5$, $b=4$.

6. Составить уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(9;8)$, если асимптоты гиперболы имеют уравнения $y=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}x$. *Ответ*: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{8}=1$.

7. Составить уравнение гиперболы, если она проходит через точку $(2;\,0)$, а ее фокусы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. *Ответ:* $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$.

8. Найти центр, полуоси и уравнения асимптот гиперболы, заданной уравнением:

1) $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0.$ *Ответ:* $(2;-3)$, $a=3$, $b=4$; $4x-3y-17=0$; $4x+3y+1=0$.

2) $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0.$ *Ответ:* $(-5;1)$, $a=8$, $b=6$; $3x+4y+11=0$; $3x-4y+19=0$.

9. Составить каноническое уравнение параболы, если длина хорды, перпендикулярной оси симметрии и делящей пополам расстояние между фокусом и вершиной, равна 1. *Ответ*: $y^2=\sqrt{2}\,x$, или $x^2=\sqrt{2}\,y$.

10. На параболе $y^2=32x$ найти точку, расстояние которой от прямой $4x+3y+10=0$ равно 2. *Ответ*: $(0;0)$, $(18;-24)$.

11. Определить координаты вершины и фокуса параболы, заданной уравнением:

1) $y^2=4x-8$; 2) $y=4x^2-8x+7$; 3) $x=-\frac{1}{4}y^2+y$.

Ответ: 1) $(2;0)$, $(3;0)$; 2) $(1;3)$, $\left(1;3\frac{1}{16}\right)$; 3) $(1;2)$, $(0;2)$.

12. Построить кривые, заданные уравнениями:

1) $x=1-\sqrt{1-2y}$; 2) $y=45+\sqrt{5x^2-10x}$; 3) $y=-2+\sqrt{3-x^2}$; 4) $x=-3-\sqrt{y^2+2y+4}$.

2.6. Поверхности второго порядка

В прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ уравнение второго порядка может быть приведено к одному из следующих канонических уравнений и определяет ***поверхность второго порядка*** или ***вырожденную поверхность.***

1. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ – *эллипсоид.*
2. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ – *однополостный гиперболоид.*
3. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ – *двуполостный гиперболоид.*
4. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ – *конус.*
5. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$ – *эллиптический параболоид.*
6. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z$ – *гиперболический параболоид.*
7. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ – *эллиптический цилиндр.*
8. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ – *гиперболический цилиндр.*
9. $y^2=2px$ – *параболический цилиндр.*

$$\left.\begin{array}{ll} 10. & \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0 \ \text{– точка } O(0;0;0) \\ 11. & \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=-1 \ \text{– мнимый эллипсоид} \\ 12. & \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0 \ \text{– пара прямых } y=\pm\dfrac{b}{a}x \end{array}\right\}\ \text{вырожденные поверхности}$$

Цилиндрические поверхности состоят из параллельных прямых (образующих), пересекающих некоторую линию (направляющую). Если в уравнении поверхности отсутствует переменная z, то уравнение определяет цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной Oz, и направляющей с уравнениями $\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=const. \end{cases}$

Для построения не цилиндрических поверхностей второго порядка, как правило, применяется метод сечений.

Пример 1. Установить тип заданных поверхностей и построить их:

1) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{25}=1$; 2) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{36}=1$; 3) $2z=x^2+\dfrac{y^2}{2}$; 4) $x^2-y^2=1$.

Решение.

1). Уравнение $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{25}=1$ определяет эллипсоид. При $z=0$ (сечение плоскостью Oxy) уравнение принимает вид $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ и определяет эллипс (рис.47) с полуосями 3 и 2, центром $O(0;0;0)$.

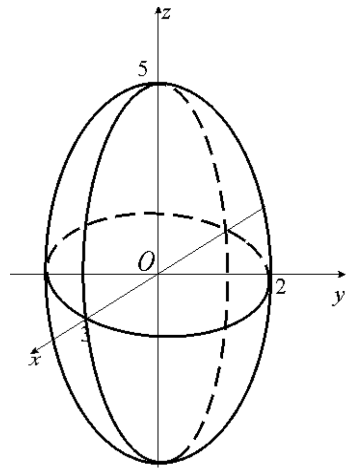


Рис. 47

Сечения поверхности плоскостями Oxz и Oyz - так же эллипсы (рис.47):

$\begin{cases} x=0, \\ \frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{25}=1, \end{cases}$ - полуоси 2 и 5, центр $O(0;0;0)$;

$\begin{cases} y=0, \\ \frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1. \end{cases}$ - полуоси 3 и 5, центр $O(0;0;0)$.

2). Уравнение $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{36}=1$ определяет однополостный гиперболоид.

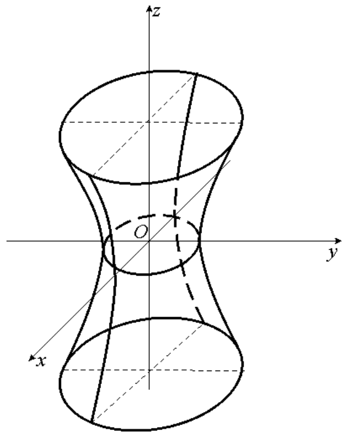


Рис. 48

При $x=0$ (сечение плоскостью Oyz) уравнение принимает вид $\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{36}=1$ и определяет гиперболу (рис.48) с полуосями 2 и 6, центром $O(0;0;0)$.

Сечение плоскостью Oxy:

$\begin{cases} z=0, \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ - эллипс с полуосями 4 и 2, центром $O(0;0;0)$.

Сечение плоскостью Oxz:

$\begin{cases} y=0, \\ \frac{x^2}{16}-\frac{z^2}{36}=1, \end{cases}$ - гипербола, полуоси 4 и 6, центр $O(0;0;0)$.

3). Уравнение $2z=x^2+\frac{y^2}{2}$, или $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=z$, определяет эллиптический параболоид (рис.49).

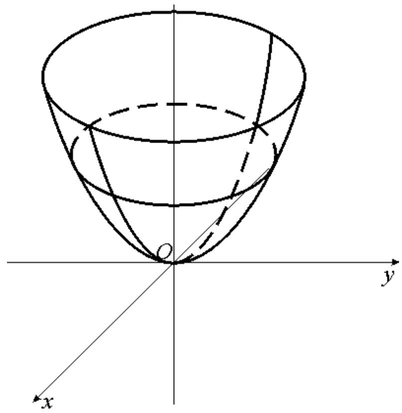


Рис. 49

Сечения плоскостью Oxy:

$\begin{cases} z=0, \\ \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=0 \end{cases}$ - точка $O(0;0;0)$,

Сечения плоскостью $z=1$:

$\begin{cases} z=1, \\ \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ - эллипс, полуоси $\sqrt{2}$ и 2, центр $O(0;0;0)$.

Сечения плоскостями Oxz и Oyz - параболы

$$\begin{cases} y=0, \\ x^2=2z \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x=0, \\ y^2=4z. \end{cases}$$

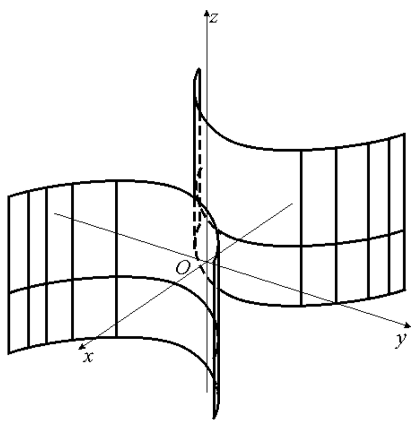


Рис. 50

4). В уравнении $x^2 - y^2 = 1$ отсутствует z, следовательно, уравнение определяет цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси Oz. Направляющая в любой плоскости $z = const$ имеет уравнение $x^2 - y^2 = 1$ и является гиперболой (рис.50).

Пример 2. Составить уравнение проекции на плоскость Oyz сечения эллиптического параболоида $y^2 + z^2 = x$ плоскостью $x + 2y - z = 0$.

Решение. Линия пересечения поверхности $y^2 + z^2 = x$ плоскостью $x + 2y - z = 0$ определяется системой $\begin{cases} y^2 + z^2 = x, \\ x + 2y - z = 0. \end{cases}$

Для отыскания проекции этой линии на плоскость Oyz исключим x из этой системы. Выразим x из каждого уравнения $\begin{cases} x = y^2 + z^2, \\ x = -2y + z. \end{cases}$

Тогда $y^2 + z^2 = z - 2y$, или $y^2 + 2y + z^2 - z = 0$. Выделим полные квадраты относительно y и z: $(y+1)^2 + (z - 1/2)^2 = 5/4$. Получим круговой цилиндр. Таким образом, проекция сечения на плоскость Oyz есть окружность $(y+1)^2 + (z - 1/2)^2 = 5/4$ с центром $(-1;\ 1/2)$ радиуса $R = \sqrt{5}/2$.

Примеры для самостоятельного решения

1. Установить тип заданных поверхностей и построить их:

1) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$; 2) $z = 2 + x^2 + y^2$; 3) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 6z$; 4) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$;

5) $x^2 - y^2 + z^2 + 4 = 0$; 6) $\frac{x^2}{4} + y^2 = z^2$; 5) $y^2 = 4x$; 6) $x^2 + y^2 - z^2 = 4$.

2. Найти центр и радиус окружности, являющейся сечением сферы $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100$ плоскостью $2x - 2y - z + 9 = 0$.

Указание. Центр окружности – проекция центра сферы на плоскость сечения.

Ответ: $(-1; 2; 3)$, $R = 8$.

3. Определить, по каким линиям пересекаются поверхности

1) $z^2 = x^2 + y^2$ и $z = x^2 + y^2$; 2) $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ и $x = 1/2$.

Ответ: 1) окружность; 2) эллипс.

3. Комплексные числа

Алгебраическая форма комплексного числа $z = x + i \cdot y$,

где $x = \operatorname{Re} z$ – действительная часть, $x \in R$; $y = \operatorname{Im} z$ – мнимая часть, $y \in R$; $i^2 = -1$.

Модуль комплексного числа $r = |z| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Аргумент комплексного числа $\arg z = \varphi$, причем $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$, $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Тригонометрическая форма комплексного числа

$$z = |\,z\,| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Показательная форма комплексного числа

$$z = |\,z\,| \cdot e^{i\varphi}.$$

Комплексное число $\bar{z} = x - i\,y$ - *сопряженное* комплексному числу $z = x + i\,y$.

Операции над комплексными числами в алгебраической форме практически совпадают с операциями над линейными многочленами с учетом равенства $i^2 = -1$.

Формула Муавра

$$z^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ n \in N.$$

Корни **степени** $n \in N$ **из комплексного числа** $z = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ – **вычисляются по формуле**

$$\omega_k = \sqrt[n]{|\,z\,|}\cdot\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\cdot\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ \text{где}\ k \in \{0,1,\ldots,n-1\}.$$

Пример 1. Доказать равенство $z\cdot\bar{z} = |\,z\,|^2$;

Решение. Пусть комплексное число $z = x + i\,y$. Тогда $\bar{z} = x - i\,y$

$$z\cdot\bar{z} = (x+i\,y)\cdot(x-i\,y) = x^2 - i\,xy + i\,yx - (i\,y)^2 = x^2 - i^2\cdot y^2 = x^2 + y^2 = |\,z\,|^2.$$

Пример 2. Представить число z в алгебраической форме, изобразить на комплексной плоскости. Найти его модуль и аргумент: 1) $\dfrac{1}{1+4i} + \dfrac{1}{4-i}$; 2) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$.

Решение.

1) $\dfrac{1}{1+4i} + \dfrac{1}{4-i} = \dfrac{1}{1+4i}\cdot\dfrac{1-4\,i}{1-4i} + \dfrac{1}{4-i}\cdot\dfrac{4+i}{4+i} = \dfrac{1-4i}{1+16} + \dfrac{4+i}{16+1} = \dfrac{1-4i+4+i}{17} = \dfrac{5-3i}{17} = \dfrac{5}{17} - \dfrac{3}{17}i$.

Число z получили в алгебраической форме.

Изобразим его на комплексной плоскости (рис.51).

Найдем модуль и аргумент комплексного числа:

$|\,z\,| = \sqrt{\left(\dfrac{5}{17}\right)^2 + \left(-\dfrac{3}{17}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{34}}{17}$, $\arg z = arctg\left(-\dfrac{3}{5}\right)$.

2) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3 = \left(\dfrac{1-i}{1+i}\cdot\dfrac{1-i}{1-i}\right)^3 = \left(\dfrac{1-2\cdot i+i^2}{1+1}\right)^3 = \left(\dfrac{1-2\cdot i+i^2}{2}\right)^3 = (-i)^3 = i$.

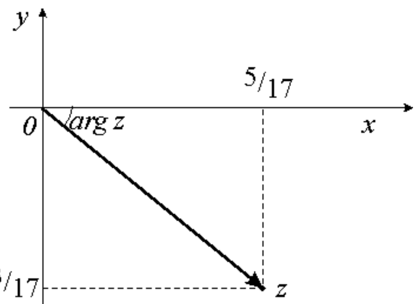


Рис. 51

Из чертежа (рис.52) видно, что $|\,z\,| = 1$, $\arg z = \dfrac{\pi}{2}$.

Пример 3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases}(3-i)z_1 + (4+2i)z_2 = 1+3i,\\ (4+2i)z_1 - (2+3i)z_2 = 7.\end{cases}$$

Решение. Определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 3-i & 4+2i \\ 4+2i & -(2+3i)\end{vmatrix} =$

$= (3-i)(-(2+3i)) - (4+2i)(4+2i) = -6-9i+2i+3i^2-16-16i-(2i)^2 =$

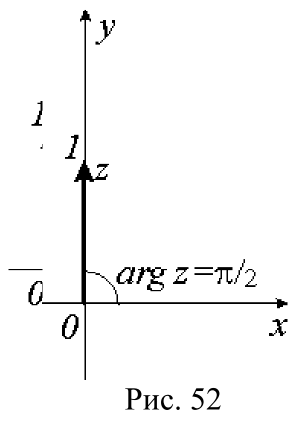


Рис. 52

$= -21 - 23i \neq 0$. Поэтому система имеет единственное решение, которое найдем методом Крамера. Вычислим определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1+3i & 4+2i \\ 7 & -(2+3i) \end{vmatrix} = -21 - 23i\ ,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3-i & 1+3i \\ 4+2i & 7 \end{vmatrix} = -23 - 21i\,.$$

Тогда $z_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-21-23i}{-21-23i} = 1$,

$$z_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-23-21i}{-21-23i} = \frac{i(-23i-21)}{-21-23i} = i\,.$$

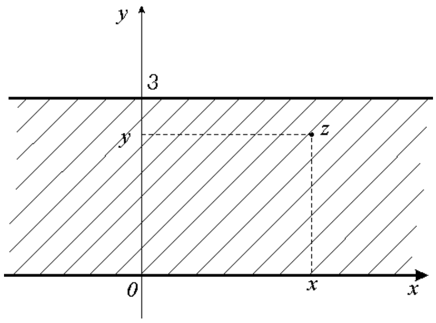


Рис. 53

Пример 4. Изобразить на комплексной плоскости множество всех точек, удовлетворяющих условиям:

1) $0 \le \operatorname{Im} z \le 3$;

2) $|z - z_0| \le R,$ где $z_0 \in \mathbf{C},\ \ R \in \mathbf{R}$ - заданные числа;

3) $|z - i| = |z + 2|$.

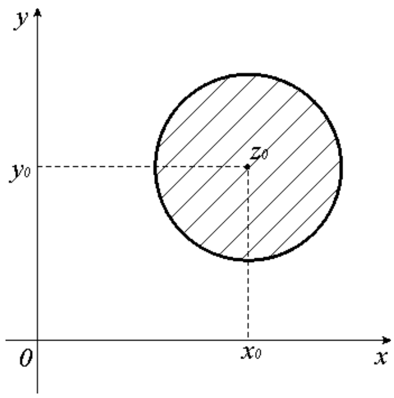


Рис. 54

Решение.

1). Так как $\operatorname{Im} z = y$, то заданное неравенство принимает вид: $0 \le y \le 3, x \in \mathbf{R}$, и определяет горизонтальную полосу (рис.53).

2). Пусть $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$. Тогда

$$z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0),\ |z - z_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\ .$$

Условие $|z - z_0| \le R$ может быть записано в виде

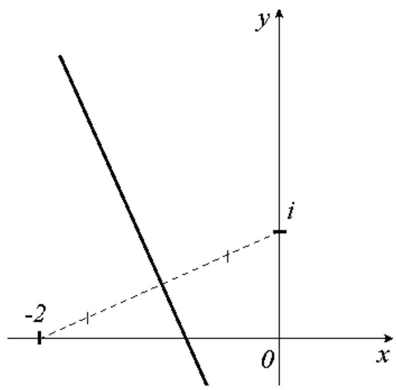
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le R^2\,.$$

Это соотношение определяет круг с центром в точке $(x_0; y_0)$ радиуса R (рис.54).

3). Равенству $|z - i| = |z + 2|$ удовлетворяют все точки z комплексной плоскости, равноудаленные от точек $z_1 = i$ и $z_2 = -2$, Эти точки образуют серединный перпендикуляр отрезка с концами z_1 и z_2 (рис.55).

Пример 5. Найти корни уравнений

$$1)\,\omega^4 = -1 + i\,,\ \ 2)\,\omega^2 = 3 + 4i\,.$$



Решение. 1). Комплексное число $z = -1 + i$ представим в тригонометрической форме. Для этого найдем его модуль и аргумент:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}\ ,\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4}.$$

Тригонометрическая форма: $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Корни четвертой степени из z (рис.56):

$$\omega_k = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{3\pi/4 + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{3\pi/4 + 2\pi k}{4}\right),\quad k \in \{0,1,2,3\}$$

$$\omega_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{16} + i\sin\frac{3\pi}{16}\right),\quad \omega_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{16} + i\sin\frac{11\pi}{16}\right),$$

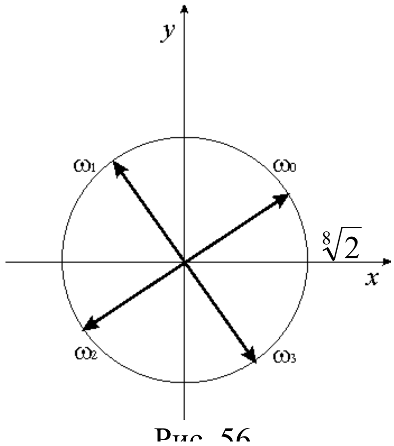


Рис. 56

$$\omega_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{16} + i\sin\frac{19\pi}{16}\right), \quad \omega_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{27\pi}{16} + i\sin\frac{27\pi}{16}\right).$$

2). Представим комплексное число $z = 3 + 4i$ в виде полного квадрата:

$$3 + 4i = (4-1) + 2\cdot 2\cdot i = 2^2 + 2\cdot 2\cdot i + i^2 = (2+i)^2 = \left(-(2+i)\right)^2.$$

Тогда уравнению $\omega^2 = 3 + 4i$ удовлетворяют два комплексных числа $\omega_1 = 2 + i$, $\omega_2 = -2 - i$

Примеры для самостоятельного решения

3. Выполнить указанные операции. Результат представить в тригонометрической и алгебраической формах.

1) $\dfrac{(1+i)\cdot(3+i)}{3-i} - \dfrac{(1-i)\cdot(3-i)}{3+i}$; 2) $\dfrac{i^5+2}{i^{19}+1}$; 3) $\left(2i - i^2\right)^2 + (1-3i)^2$.

Ответ: 1) $\dfrac{14}{5}i$; 2) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$; 3) $-11 - 2i$.

4. Доказать равенства а) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$; б) $z - \overline{z} = 2i\cdot\operatorname{Im} z$; в) $\left(\overline{\overline{z}}\right) = z$; г) $\left|\overline{z}\right| = |z|$;

д) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; е) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$; ж) $\overline{z_1 / z_2} = \overline{z}_1 / \overline{z}_2$.

Указание. Представить комплексное число в алгебраической форме и воспользоваться равенством $\overline{z} = x - i\,y$.

5. Решить системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases}(2+i)z_1+(2-i)z_2=6,\\(3+2i)z_1+(3-2i)z_2=8;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}iz_1+z_2=i,\\(i+1)z_1-(i-1)z_2=(i+1).\end{cases}$

Ответ: 1) $z_1=2+i, z_2=2-i$; 2) $z_1=1+ic, z_2=c, c\in\mathbf{R}$.

6. Изобразить на комплексной плоскости множество всех точек, удовлетворяющих условию: 1) $|\mathrm{Re}\, z|\le 5$; 2) $|z+1|=2$; 3) $|z|\ge 1-\mathrm{Re}\, z$.

Ответ: 1) полоса $-5\le x\le 5$; 2) окружность, центр $(-1;0)$, $R=2$; 3) $y^2\ge 1-2x$.

7. Найти корни из комплексных чисел и изобразить их на комплексной плоскости: а) $\sqrt[5]{-9}$; б) $\sqrt[3]{2\sqrt{3}+2i}$.

4. Матрицы и определители

4.1. Действия с матрицами

Пример 1. Вычислить произведения матриц:

$$1)\ \begin{pmatrix}3 & -2\\5 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\2 & 5\end{pmatrix},\ 2)\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\3 & -4 & 1\\2 & -5 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\1 & 2 & 5\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

Решение. 1). Пусть строки матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\5 & -4\end{pmatrix}$ есть A_1, A_2, а столбцы матрицы $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\2 & 5\end{pmatrix}$ есть B_1, B_2. Тогда по определению произведения матриц

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}A_1\cdot B_1 & A_1\cdot B_2\\A_2\cdot B_1 & A_2\cdot B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot3+(-2)\cdot2 & 3\cdot4+(-2)\cdot5\\5\cdot3+(-4)\cdot2 & 5\cdot4+(-4)\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2\\7 & 0\end{pmatrix}.$$

2). Аналогично, если $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\3 & -4 & 1\\2 & -5 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\1 & 2 & 5\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, то

$$AB=\begin{pmatrix}A_1B_1 & A_1B_2 & A_1B_3\\A_2B_1 & A_2B_2 & A_2B_3\\A_3B_1 & A_3B_2 & A_3B_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-3+2 & 5-6+6 & 6-15+4\\6-4+1 & 15-8+3 & 18-20+2\\4-5+3 & 10-10+9 & 12-25+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5 & -5\\3 & 10 & 0\\2 & 9 & -7\end{pmatrix}.$$

Пример 2. Вычислить $\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}^n$.

Решение. Вычислим сначала $\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-3 & -2+2\\6-6 & -3+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$.

Тогда $\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$.

Таким образом, если $n=2k$ (четное), то

$\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}^{2k}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$.

Если $n=2k+1$ (нечетное), то $\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}^{2k+1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}$.

Пример 3. Найти матрицу $D = AB + B^T C$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Число сток матрицы A равно числу столбцов матрицы B, следовательно, произведение AB существует. Вычислим его. $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Запишем $B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Число строк матрицы B^T равно числу столбцов матрицы C, поэтому произведение $B^T C$ существует и $B^T C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Матрицы AB и $B^T C$ одного размера, следовательно, их можно сложить

$$AB + B^T C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 4 & -1 \\ 4 & -6 & -2 & 2 \\ 2 & 7 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Найти значение многочлена $f(x) = 2x^2 - x + 3$ от матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем многочлен от матрицы $f(A) = 2A^2 - A + 3E$, E - единичная матрица размера 3. Вычислим $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 12 \\ -2 & 1 & -2 \\ 14 & 24 & 31 \end{pmatrix}$.

Запишем $f(A) = 2\begin{pmatrix} 7 & 8 & 12 \\ -2 & 1 & -2 \\ 14 & 24 & 31 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 16 & 24 \\ -4 & 2 & -4 \\ 28 & 48 & 62 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & -4 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 16 & 22 \\ -3 & 4 & -4 \\ 25 & 44 & 60 \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Матрицы A и B называются перестановочными, если $AB = BA$. Пусть матрица $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Найдем произведения AB и BA.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\gamma & \beta + 2\delta \\ 3\alpha + 4\gamma & 3\beta + 4\delta \end{pmatrix}; \quad BA = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 3\beta & 2\alpha + 4\beta \\ \gamma + 3\delta & 2\gamma + 4\delta \end{pmatrix}.$$

Матрицы равны, если равны их соответствующие элементы. Получим систему с неизвестными $\alpha, \beta, \delta, \gamma$.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+2\gamma=\alpha+3\beta\\ \beta+2\delta=2\alpha+4\beta\\ 3\alpha+4\gamma=\gamma+3\delta\\ 3\beta+4\delta=2\gamma+4\delta\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2\gamma=3\beta\\ 2\delta=2\alpha+3\beta\\ 3\delta=3\alpha+3\gamma\\ 3\beta=2\gamma\end{array}\right\}$$

Так как последнее уравнение совпадает с первым, а второе будет пропорционально третьему, если 3β заменить на 2γ, то получим равносильную систему: $\left.\begin{array}{l}2\gamma=3\beta,\\ \delta=\alpha+\gamma.\end{array}\right\}$ Имеем два уравнения с четырьмя неизвестными. Выбрав два неизвестных (например α,γ) за параметры, выразим оставшиеся (β,δ) через них. Получим: $\beta=\frac{2}{3}\gamma$, $\delta=\alpha+\gamma$ и матрица $B=\begin{pmatrix}\alpha & \frac{2}{3}\gamma\\ \gamma & \alpha+\gamma\end{pmatrix}$.

Примеры для самостоятельного решения

1. Вычислить произведение матриц:

1) $\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9 & -6\\ 6 & -4\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$. *Ответ*: 1) $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}6 & -1 & 4\\ 7 & 3 & 3\\ 0 & 6 & -4\end{pmatrix}$.

2. Пусть $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Показать, что $A^n=2^{n-1}A$.

Указание. Вычислить A^2, применить метод математической индукции.

3. Справедливо ли равенство $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$,

если $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$? *Ответ*: нет.

4. Показать, что матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ есть корень многочлена $f(x)=x^2-4x+3$.

5. Найти общий вид матрицы B третьего порядка, для которой $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot B=\mathrm{O}$.

Ответ: $B=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, α,β,γ - произвольные числа.

4.2. Определители

Пример 1. Доказать, что при действительных a,b,c корни уравнения $\begin{vmatrix}a-x & b\\ b & c-x\end{vmatrix}=0$ действительны.

Решение. Вычислим определитель

$$\begin{vmatrix}a-x & b\\ b & c-x\end{vmatrix}=(a-x)(c-x)-b^2=x^2-(a+c)x-b^2+ac\ .$$

Получим квадратное уравнение $x^2-(a+c)x-b^2+ac=0$. Корни этого уравнения действительны, если дискриминант неотрицателен. Вычислим дискриминант: $D=(a+c)^2+4b^2+4ac=a^2+2ac+c^2+4b^2-4ac=a^2-2ac+c^2+4b^2=(a-c)^2+4b^2\geq 0$ при любых действительных a,b,c.

Пример 2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$ по определению и используя свойства определителей

Решение. а). По определению

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 16 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 16 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} + 5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(30+16)+5\cdot(-1)=92-5=87.$$

б). Используя свойства: если вторую строку умножить на (-2) и добавить к первой, определитель не изменит своего значения. Получим

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & -27 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} = \Delta.$$

Раскроем определитель по элементам первого столбца (теорема разложения).

Тогда $\Delta=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -6 & -27 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} = -1\cdot(-60-27)=87$.

Пример 3. Вычислить определители

$$1)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},\quad 2)\ \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Известно, что определитель, содержащий ниже (выше) главной диагонали нули, равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали. Используя свойства определителей, приведем данные определители к виду, когда ниже главной диагонали стоят нули.

$$1)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Первоначально к первому столбцу добавили все остальные, затем из первого столбца вынесли общий множитель 3, и, наконец, последовательно вычли первую строку из всех остальных.

$$2)\ \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 6 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 11 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -4 & -20 \\ 0 & -2 & 1 & 11 \\ 0 & -2 & 1 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -4 & -20 \\ 0 & 0 & 9 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 27.$$

Первоначально вторую строку добавили к первой и третьей; затем первую строку сначала умножили на (-4) и добавили ко второй, потом на 2 и добавили к четвертой, и, наконец, вторую строку умножили на (-2) и добавили к третьей, а третью вычли из четвертой.

Примеры для самостоятельного решения

1. Решить неравенство $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14$. *Ответ*: $x \in (-1;7)$.

2. Решить уравнение. $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. *Ответ*: $x = -10;\ x = 2$.

3. Вычислить определители: 1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -6 & 6 & -1 & -11 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

Ответ: 1) 5; 2) 18.

4.3. Обратная матрица

Пример 1. Выяснить, существует ли обратная матрица для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Если обратная матрица существует, найти её.

Решение. Матрица обратима, если её определитель не равен нулю. Вычислим

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2 \neq 0 \ \Rightarrow\ A^{-1} \text{ - существует.}$$

Найдем матрицу из алгебраических дополнений:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4,\ A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3,\ A_{21} = -2,\ A_{21} = 1.$$

Известно, что $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^T \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Как проверить результат? По определению обратной матрицы $A^{-1} \cdot A = E$ и $A \cdot A^{-1} = E$. Проверим эти равенства:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E \text{ и } A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Матрица A^{-1} найдена верно.

Пример 2. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$.

Решение. Найдем A^{-1}, используя метод Гаусса. Запишем матрицу $(A \mid E)$ и с помощью преобразований приведем её к виду $(E \mid A^{-1})$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 - A_1 \\ A_3 - A_2 \\ A_4 - A_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 10 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B_1 - B_2 \\ B_2 \\ B_3 - B_2 \\ B_4 - B_3 \end{pmatrix} =$$

$$=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&-1&-2&2&-1&0&0\\0&1&2&3&-1&1&0&0\\0&0&1&3&1&-2&1&0\\0&0&1&4&0&1&-2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\\C_4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}C_1+C_3\\C_2-2C_3\\C_3\\C_4-C_3\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&1&3&-3&1&0\\0&1&0&-3&-3&5&-2&0\\0&0&1&3&1&-2&1&0\\0&0&0&1&-1&3&-3&1\end{array}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}D_1\\D_2\\D_3\\D_4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}D_1-D_4\\D_2+3D_4\\D_3-3D_4\\D_4\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&4&-6&4&-1\\0&1&0&0&-6&14&-11&3\\0&0&1&0&4&-11&10&-3\\0&0&0&1&-1&3&-3&1\end{array}\right)\quad\Rightarrow\ A^{-1}=\begin{pmatrix}4&-6&4&-1\\-6&14&-11&3\\4&-11&10&-3\\-1&3&-3&1\end{pmatrix}.$$

Пример 3. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix}1&2&-3\\3&2&-4\\2&-1&0\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1&-3&0\\10&2&7\\10&7&8\end{pmatrix}$.

Решение. Если матрица $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\3&2&-4\\2&-1&0\end{pmatrix}$ обратима, то $X=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1&-3&0\\10&2&7\\10&7&8\end{pmatrix}$.

Вычислим

$$\det A=\begin{vmatrix}1&2&-3\\3&2&-4\\2&-1&0\end{vmatrix}=\left(1\cdot2\cdot0+2\cdot(-4)\cdot2+3\cdot(-1)\cdot(-3)\right)-\left(-3\cdot2\cdot2+(-4)\cdot(-1)\cdot1+3\cdot2\cdot0\right)=-7+8=1.$$

Так как $\det A\neq0$, то существует обратная матрица A^{-1}. Для её отыскания найдем алгебраические дополнения матрицы A:

$A_{11}=\begin{vmatrix}2&-4\\-1&0\end{vmatrix}=-4$, $A_{12}=\begin{vmatrix}3&-4\\2&0\end{vmatrix}\cdot(-1)^3=-8$, $A_{13}=\begin{vmatrix}3&2\\2&-1\end{vmatrix}\cdot(-1)^4=-7$, $A_{21}=-\begin{vmatrix}2&-3\\-1&0\end{vmatrix}=3$,

$A_{22}=\begin{vmatrix}1&-3\\2&0\end{vmatrix}=6$, $A_{23}=-\begin{vmatrix}1&2\\2&-1\end{vmatrix}=5$, $A_{31}=\begin{vmatrix}2&-3\\2&-4\end{vmatrix}=-2$, $A_{32}=-\begin{vmatrix}1&-3\\3&-4\end{vmatrix}=-5$, $A_{33}=\begin{vmatrix}1&2\\3&2\end{vmatrix}=-4$.

По формуле $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{pmatrix}^T$ получим $A^{-1}=\begin{pmatrix}-4&3&-2\\-8&6&-5\\-7&5&-4\end{pmatrix}$.

Тогда $X=\begin{pmatrix}-4&3&-2\\-8&6&-5\\-7&5&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-3&0\\10&2&7\\10&7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&4&5\\2&1&2\\3&3&3\end{pmatrix}$.

Пример 4. Показать, что матрица, обратная к неособенной симметричной матрице, будет симметричной.

Решение. Матрица называется симметричной, если для неё выполняется равенство $A^T=A$. Пусть дана неособенная симметричная матрица A. Тогда $\det A\neq0$. Следовательно, для A существует обратная A^{-1}. Нужно показать, что $\left(A^{-1}\right)^T=A^{-1}$. Вспомним, что $\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^T\right)^{-1}$ и используем условие $A^T=A$: $\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^T\right)^{-1}=(A)^{-1}=A^{-1}$. Итак, $\left(A^{-1}\right)^T=A^{-1}$, а это означает, что матрица A^{-1} - симметричная.

Примеры для самостоятельного решения

1. Найти, если возможно, обратную матрицу для матрицы
$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$. *Ответ*: $A^{-1}=\frac{1}{9}A$.

2. Найти обратную матрицу для матрицы
$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$. *Ответ*: $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

3.Решить уравнение $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 0 & 2 & -4\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. *Ответ*: $X=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-42 & -49 & 49\\ 22 & 16 & -18\\ -8 & -9 & 11\end{pmatrix}$.

4. Пусть A и B - неособенные матрицы одного и того же порядка. Показать что, если $AB=BA$, то $A^{-1}B=BA^{-1}$ и $A^{-1}B^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

4.4. Ранг матрицы

Пример 1. Вычислить ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & -1\\ 2 & -1 & -3 & 4\\ 5 & 1 & -1 & 7\\ 7 & 7 & 9 & 1\end{pmatrix}$.

Решение. С помощью элементарных преобразований приведем матрицу к ступенчатому виду.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & -1\\ 2 & -1 & -3 & 4\\ 5 & 1 & -1 & 7\\ 7 & 7 & 9 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\\ A_3\\ A_4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}A_1\\ A_2-2A_1\\ A_3-5A_1\\ A_4-7A_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & -1\\ 0 & -7 & -13 & 6\\ 0 & -14 & -26 & 12\\ 0 & -14 & -26 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1\\ B_2\\ B_3\\ B_4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}B_1\\ B_2\\ B_3-2B_2\\ B_4-2B_2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & -1\\ 0 & -7 & -13 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 1\\ 0 & -7 & -13 & 6\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{pmatrix}.$$

Переставив третий и четвертый столбцы, получим матрицу ступенчатого вида

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 5\\ 0 & -7 & 6 & -13\\ 0 & 0 & -4 & 0\end{pmatrix},\text{ поэтому } rang\,A=3.$$

Пример 2. Чему равен ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix}$ при различных значениях параметра λ?

Решение. Приведем матрицу A к ступенчатому виду. Выполним следующие элементарные преобразования:

$$A=\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\\ A_3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}A_3\\ A_1-A_3\\ A_2-2A_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 10 & -6 & 1\\ 0 & \lambda-10 & 5 & 1\\ 0 & -21 & \lambda+12 & 3\end{pmatrix}.$$

Переставив второй и четвёртый столбцы и проведя еще раз элементарные преобразования, получим:

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -6 & 10\\ 0 & 1 & 5 & \lambda-10\\ 0 & 3 & \lambda+12 & -21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1\\ B_2\\ B_3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}B_1\\ B_2\\ B_3-3B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -6 & 10\\ 0 & 1 & 5 & \lambda-10\\ 0 & 0 & \lambda-3 & -3\lambda+9\end{pmatrix}.$$

Если $\lambda=3$, то $A\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -6 & 10\\ 0 & 1 & 5 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -6 & 10\\ 0 & 1 & 5 & -7\end{pmatrix}$ и $rangA=2$.

Если $\lambda\neq 3$, то $\lambda-3\neq 0$ и $rang\,A=3$.

Примеры для самостоятельного решения

1. Вычислить ранг матрицы.

1) $A=\begin{pmatrix}4 & 3 & -5 & 2 & 3\\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2\\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7\\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5\\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -3 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$. *Ответ*: 1) $rangA=2$; 2) $rangA=3$.

2. Найти значения λ, при которых матрица $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1 & 4\\ \lambda & 4 & 10 & 1\\ 1 & 7 & 17 & 3\\ 2 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$ имеет наименьший ранг. Найти это значение λ и найти ранг при других значениях λ.

Ответ: $\lambda=0$, $rangA=2$; $\lambda\neq 0$, $rangA=3$.

4.5. Решение линейных систем

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=5,\\ 3x_1+2x_2+5x_3=2,\\ 2x_1+x_2-2x_3=7.\end{cases}$$

Решение. Дана система трёх уравнений с тремя неизвестными. Если определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера. Вычислим определитель системы.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 5\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & -2\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-9+32-3=20\neq 0.$$

Составим и вычислим определители Δ_1, Δ_2, Δ_3.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}5 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 5\\ 7 & 1 & -2\end{vmatrix}=-3,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 5 & 3\\ 3 & 2 & 5\\ 2 & 7 & -2\end{vmatrix}=92,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ 3 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 7\end{vmatrix}=-27.$$

Тогда $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=-\dfrac{3}{20}$; $x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{92}{20}=\dfrac{23}{5}$; $x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}=-\dfrac{27}{20}$

Пример 2. Исследовать совместность системы и, если возможно, найти её решение: 1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 11x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 7x_4 = 7. \end{cases}$

Решение. 1). Составим расширенную матрицу системы и сведем её к ступенчатой матрице с помощью элементарных преобразований.
Вычислим $rangA$ и $rang(A \mid B)$. Если $rang(A \mid B) = rangA$, то система совместна.

$$A \mid B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 - A_1 \\ A_3 - 3A_1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 10 & -4 & -4 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 - 2B_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \end{array}\right).$$

Таким образом, $rang(A \mid B) = rangA = 2$.
Следовательно, система совместна. Так как ранг матрицы меньше числа неизвестных $rangA = 2 < 3$ (число неизвестных), то система имеет множество решений. Продолжим преобразование матрицы $(A \mid B)$:

$$(A \mid B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} C_1 + \frac{2}{5}C_2 \\ \frac{1}{5}C_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right).$$

Запишем систему: $\begin{cases} x_1 + \frac{1}{5}x_3 = \frac{11}{5}, \\ x_2 - \frac{2}{5}x_3 = -\frac{2}{5}. \end{cases}$

Получим общее решение системы: $\begin{cases} x_1 = \frac{11}{5} - \frac{1}{5}x_3, \\ x_2 = -\frac{2}{5} + \frac{2}{5}x_3. \end{cases}$

Придавая параметру x_3 различные значения, будем получать частные решения. Например, если $x_3 = 1$, то частное решение: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$; если $x_3 = 0$, то $x_1 = \frac{11}{5}$, $x_2 = -\frac{2}{5}$, $x_3 = 0$. Это частное решение называют базисным.

2). $$(A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 11 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -7 & 7 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 - A_1 \\ A_3 - 3A_1 \\ A_4 - A_1 \\ A_5 + A_1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 2 & -10 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 3 & -4 & 11 \end{array}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 - 4B_2 \\ B_4 - B_2 \\ B_5 + B_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right).$$

Следовательно, $rangA = 4$, $rang(A \mid B) = 5$ и система несовместна. Это утверждение следует и из последнего уравнения системы: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -3 \Rightarrow$ уравнение не имеет решения.

Пример 3. Решить систему в зависимости от параметра λ:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5, \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 2. \end{cases}$$

Решение. Составим матрицу $(A \mid B)$.

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 \\ 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 4 & 1 & 4 & \lambda & 2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A_1 - A_2 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 \\ 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 4 & 1 & 4 & \lambda & 2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 - 2B_1 \\ B_3 - B_1 \\ B_4 - 4B_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & 8 & 16 & 9 \\ 0 & -5 & -8 & -16 & -9 \\ 0 & 5 & 8 & \lambda + 16 & 10 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 + C_2 \\ C_4 - C_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & 8 & 16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & 8 & 16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \end{array}\right)$$

1). Если $\lambda = 0$, то $rangA = 2$, $rang(A \mid B) = 3$ и система несовместна.

2). Если $\lambda \neq 0$, то $rangA = rang(A \mid B) = 3$. Число неизвестных равно 4, следовательно, система имеет множество решений, число свободных неизвестных равно 1 ($n - rangA$). Продолжим преобразования:

$$(A \mid B) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & 8 & 16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} D_1 + \frac{1}{5} D_2 \\ \frac{1}{5} D_2 \\ \frac{1}{\lambda} D_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{8}{5} & \frac{16}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda} \end{array}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} E_1 + \frac{4}{5} E_3 \\ E_2 - \frac{16}{5} E_3 \\ E_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & -\frac{1}{5} + \frac{4}{5\lambda} \\ 0 & 1 & \frac{8}{5} & 0 & \frac{9}{5} - \frac{16}{5\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda} \end{array}\right).$$

Запишем систему: $\begin{cases} x_1 + \frac{3}{5} x_3 = -\frac{1}{5} + \frac{4}{5\lambda}, \\ x_2 + \frac{8}{5} x_3 = \frac{9}{5} - \frac{16}{5\lambda}, \\ x_4 = \frac{1}{\lambda}. \end{cases}$ Общее решение: $\begin{cases} x_1 = \frac{4 - \lambda}{5\lambda} - \frac{3}{5} x_3, \\ x_2 = \frac{9\lambda - 16}{5\lambda} - \frac{8}{5} x_3, \\ x_4 = \frac{1}{\lambda}, \end{cases}$

где x_3 – свободное неизвестное.

Примеры для самостоятельного решения

1. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 28, \\ 7x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -1, \\ 7x_1 + 9x_2 - 9x_3 = 5. \end{cases}$. *Ответ*: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$.

2. Исследовать совместность системы и, если возможно, найти её решение.

$$1)\begin{cases}2x_1+7x_2+3x_3+x_4=5,\\ x_1+3x_2+5x_3-2x_4=3,\\ x_1+5x_2-9x_3+8x_4=1,\\ 5x_1+18x_2+4x_3+5x_4=12.\end{cases}\qquad 2)\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3+3x_4=10,\\ 2x_1+6x_2+5x_3+8x_4=21,\\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=8,\\ 2x_1+4x_2+5x_3+7x_4=18.\end{cases}.$$

Ответ: 1). Система совместна, общее решение имеет вид: $x_1=6-26x_3+17x_4$; $x_2=-1+7x_3-5x_4$; 2). Система имеет единственное решение: $x_1=11$, $x_2=0$, $x_3=-5$, $x_4=3$.

3. Решить систему в зависимости от значений параметра λ.

$$\begin{cases}5x_1-3x_2+2x_3+4x_4=3,\\ 4x_1-2x_2+3x_3+7x_4=1,\\ 8x_1-6x_2-x_3-5x_4=9,\\ 7x_1-3x_2+7x_3+17x_4=\lambda.\end{cases}$$

Ответ: при $\lambda\neq 0$ система несовместна; при $\lambda=0$ система совместна, общее решение имеет вид: $\begin{cases}x_1=-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}x_3-\frac{13}{2}x_4,\\ x_2=-\frac{7}{2}-\frac{7}{2}x_3-\frac{19}{2}x_4.\end{cases}$.

4.6. Решение однородных систем

Пример 1. Найти общее решение системы

$$\begin{cases}5x_1+6x_2-2x_3+7x_4+4x_5=0,\\ 2x_1+3x_2-x_3+4x_4+2x_5=0,\\ 7x_1+9x_2-3x_3+5x_4+6x_5=0,\\ 5x_1+9x_2-3x_3+x_4+6x_5=0.\end{cases}$$

Решение. Запишем и преобразуем матрицу системы:

$$A=\begin{pmatrix}5&6&-2&7&4\\2&3&-1&4&2\\7&9&-3&5&6\\5&9&-3&1&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\\A_4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}A_1-2A_2\\A_2\\A_3\\A_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\2&3&-1&4&2\\7&9&-3&5&6\\5&9&-3&1&6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\B_3\\B_4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}B_1\\B_2-2B_1\\B_3-7B_1\\B_4-5B_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\0&3&-1&6&2\\0&9&-3&12&6\\0&9&-3&6&6\end{pmatrix}==\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\\C_4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3-3C_2\\C_4-3C_2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\0&3&-1&6&2\\0&0&0&-6&0\\0&0&0&-12&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\0&3&-1&6&2\\0&0&0&-6&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\0&3&-1&6&2\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow rangA=3.$$

Число неизвестных равно 5. Число свободных неизвестных $5-3=2$.

Выпишем систему, эквивалентную исходной: $\begin{cases}x_1-x_4=0,\\ 3x_2-x_3+6x_4+2x_5=0,\\ x_4=0.\end{cases}$.

Очевидно, $x_1=x_4=0$, за свободные неизвестные удобно взять x_2, x_5.

Общее решение: $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_3 = 3x_2 + 2x_5, \\ x_4 = 0. \end{cases}$

Запишем ответ в матричной форме: $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$.

Пусть $x_2 = C_1$, $x_5 = C_2$, тогда $X = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Решить систему:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ 1x_1 + 1x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Запишем и преобразуем матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 9 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A_3 \\ A_1 - 3A_3 \\ A_2 - 4A_3 \\ A_4 - 2A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 14 \\ 0 & 3 & 21 \\ 0 & 7 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Получим $rangA = 3$. Следовательно, система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Примеры для самостоятельного решения

Найти, если возможно, общее решение систем:

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$.

Ответ: 1) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. 2) $x_1 = -3x_3 - 5x_5$, $x_2 = 2x_3 + 3x_5$, $x_4 = 0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике/Д.Т. Письменный. Ч.1. М.: Айрис-пресс, 2003. 288 с.
2. Краснов М.Л. Вся высшая математика/М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. Ч.1. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 352 с.
3. Высшая математика/Под ред. Г.Н. Яковлева. М.: Высшая школа, 2004. 584 с.
4. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии/Д.В. Клетеник: уч.пособие для втузов. 17-е изд. СПб.: Изд-во «Профессия», 2003. 200 с.
5. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах/П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова: Ч. 1. М.: Изд-во «Оникс 21 век», 2005. 416 с.
6. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа/ под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. М.: Наука, 1996. 464 с.
7. Черненко В.Д. Высшая математика в примерах и задачах. Т.1. С-Птб. Изд-во «Политехника», 2003. 476 с.

Учебное издание

Надежда Юрьевна Одинцова
Валентина Васильевна Трещева

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Редактор *Н.П. Кубыщенко*

Подисано в печать 22.11.2004 Формат 60×84 1/16
Бумага типографская Офсетная печать Усл. печ. л. 3.95
Уч.-изд. л. 4.0 Тираж 150 Заказ Цена ″С″

Редакционно-издательский отдел ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, Мира, 19

Ризография НИЧ ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, Мира, 19